Übungsblatt 6

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 8.12.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Der Matrix-Formalismus*

   Die Menge $B = \{\phi_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} | n \in \mathbb{N}\}$ bilde eine Orthonormalbasis des Hilbertraums zu einem quantenmechanischem System. Wir identifizieren nun jedes $\phi_n \in B$ mit einem (potentiell unendlichdimensionalen) Einheitsvektor $\mathbf{e}_n$, dessen Komponenten gegeben sind durch $e_{n,i} := (\mathbf{e}_n)_i = \delta_{in}$.

   (a) (2 Punkte) Betrachten Sie die Matrix $\mathcal{O}$, definiert durch

   $$\mathcal{O}_{mn} = (\phi_m, O\phi_n) = \int \mathrm{d}^3x\, \phi_m^*(\mathbf{x}) O \phi_n(\mathbf{x}).$$

   Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators O im Zustand $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_n \alpha_n \phi_n(\mathbf{x})$ mit $\alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\sum_n |\alpha_n|^2 = 1$ gegeben ist durch

   $$\langle O \rangle_\Phi = \mathbf{f}^\dagger \mathcal{O} \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \sum_n \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

   (b) (4 Punkte) Es sei nun B konkret die Menge der Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen $\mathcal{X} = (\phi_m, x\phi_n)$ und $\mathcal{P} = \left(\phi_m, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\phi_n\right)$ der Orts- und Impulsoperatoren und zeigen Sie, dass diese eine zu den Operatoren analoge Kommutationsrelation erfüllen.
   Hinweis: Drücken Sie zunächst x und $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ durch die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ aus der Vorlesung aus.

2. *Der harmonische Oszillator im elektrischen Feld* (4 Punkte)

   Das Potential des eindimensionalen harmonischen Oszillators im homogenen elektrischen Feld E lautet

   $$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx,$$

   wobei q die elektrische Ladung ist. Berechnen Sie die Eigenfunktionen und Energieeigenwerte.

Hinweis: Bringen Sie das Potential auf eine Form, die die Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator reproduziert, die Sie aus der Vorlesung kennen.

3. *Der dreidimensionale harmonische Oszillator*

   Betrachten Sie den Hamiltonoperator für einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator

   $$H = \hbar\omega \sum_{i=1}^{3} \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right),$$

   wobei die Leiteroperatoren $a_i^{(\dagger)}$ wie in der Vorlesung definiert sind:

   $$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_i + \frac{\partial}{\partial u_i}\right), \quad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_i - \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$$
   $$u_i = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_i$$
   $$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0.$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung durch den Separationsansatz

   $$\phi_{n_1,n_2,n_3}(\mathbf{u}) = \phi_{n_1}(u_1)\phi_{n_2}(u_2)\phi_{n_3}(u_3)$$

   gelöst wird und berechnen Sie die Energieeigenwerte.

   (b) (2 Punkte) Drücken Sie den Drehimpulsoperator $L_k = -i\hbar\varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ durch a_i und $a_i^\dagger$ aus.

   (c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrix

   $$(L_z)_{mn} = (\psi_m, L_3\psi_n) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\, \psi_m^*(\mathbf{x}) L_3 \psi_n(\mathbf{x})$$

   sowie deren Eigenwerte und normierte Eigenvektoren, wobei

   $$\psi_n(\mathbf{x}) := a_n^\dagger \phi_{000}(\mathbf{x})$$

   die Eigenfunktionen zum niedrigsten Energieeigenwert nach der Grundzustandsenergie sind.

   (d) (1 Punkt) Stellen Sie den Operator $\mathbf{L}^2 = \sum_{k=1}^{3} L_k^2$ mit $a_i^\dagger$ und a_i dar.

   (e) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrix $(\mathcal{L})_{mn} = (\psi_m, \mathbf{L}^2\psi_n)$ und bestimmen Sie drei Linearkombinationen von ψ_i aus Aufgabenteil (c), die gemeinsame Eigenfunktionen der Energie, und der Operatoren $\mathbf{L}^2$ und L_3 sind.