

Aus dem Gauß'schen Ansatz für $\hat{\psi}(k)$ folgt die Unschärferelation dann

$$|\hat{\psi}(k)|^2 \propto e^{-2(k-k_0)^2 d^2} \Rightarrow (\Delta k)^2 = \frac{1}{4d^2}$$

Ferner führt dieser Ansatz für $\hat{\psi}$ auf

$$|\psi(x,t)|^2 \propto e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $(\Delta x)^2 = d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^2}$

Darum berechnet man $(\Delta x)(\Delta p)$ zu

$$(\Delta x)(\Delta p) = (\Delta x) \hbar (\Delta k) = \begin{cases} \hbar d \frac{1}{2d} = \frac{\hbar}{2}, & t=0 \\ \hbar \left(d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^2} \right)^{1/2} \frac{1}{2d} > \frac{\hbar}{2}, & t>0 \end{cases}$$

Also gilt

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dies ist natürlich kein strenger Beweis der Unschärferelation. Die Rechnung zeigt aber, dass ein Gauß'sches Wellenpaket zur Beschreibung eines quantenmechanischen Punktteilchens mit der Unschärferelation konsistent ist.

Wichtig ist es, sich klar zu machen, dass nur die gleichzeitige Kenntnis von Ort & Impuls unsharp sind, nicht die Größen selbst.

Heisenberg sprach daher von der
"Unbestimmtheitsrelation":

Es gibt eine prinzipielle Grenze für die Bestimmung von Ort & Impuls.

Das Konzept der Bahnkurve (Trajektorie) verliert in der Quantenmechanik seinen Sinn,

1.4 Schrödingergleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Schrödingergleichung für ein freies Teilchen:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t)$$

Dies wird z. B. erfüllt durch den Ausdruck für ein Gaußsches Wellenpaket.

Der allgemeine Lösungsansatz für die freie Gleichung lautet

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{- (i/\hbar) Et} \Psi(\vec{x})$$

Einsetzen führt auf

$$i\hbar \dot{\Psi} = i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar}\right) E e^{-(i/\hbar)Et} \psi(\vec{x})$$

$$= e^{-(i/\hbar)Et} E \psi(\vec{x})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) = -e^{-(i/\hbar)Et} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x})$$

und somit auf die Gleichung

$$E \psi(\vec{x}) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla)^2 \psi(\vec{x})$$

Betrachtet man ebene Wellen, also

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}$$

so sind diese Lösungen der Gleichung, falls

$$E \psi(\vec{x}) = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2\right) \left(-\vec{k}^2\right) \psi(\vec{x}),$$

d.h. falls

$$E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Dies ist die bekannte Energie-Impuls-Beziehung.

Folgerung: In der Quantenmechanik sind

den klassischen Größen E und \vec{p} die

Differentialoperatoren $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ und $-i\hbar \vec{\nabla}$

zugeordnet:

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

Falls zusätzlich ein Potential betrachtet wird,
so modifiziert sich die klassische Energie
gemäß

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}, t).$$

Entsprechend modifiziert man die Schrödinger-
gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t)$$

Zeitabhängige Schrödingergleichung (1926).

Diese Gleichung enthält das Analog zur
klassischen Hamilton-Funktion

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}, t) = T + V$$

auf der rechten Seite.

Punkt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t)$$

mit dem Kommutatoroperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}, t)$$

Falls das Potential V nicht explizit zeitabhängig ist, kann man wieder den Separationsansatz

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)Et} \psi(\vec{x})$$

verwenden. Dies führt auf

$$E \psi(\vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}) \equiv \hat{H} \psi(\vec{x})$$

(zeit unabhängige Schrödingergleichung)

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

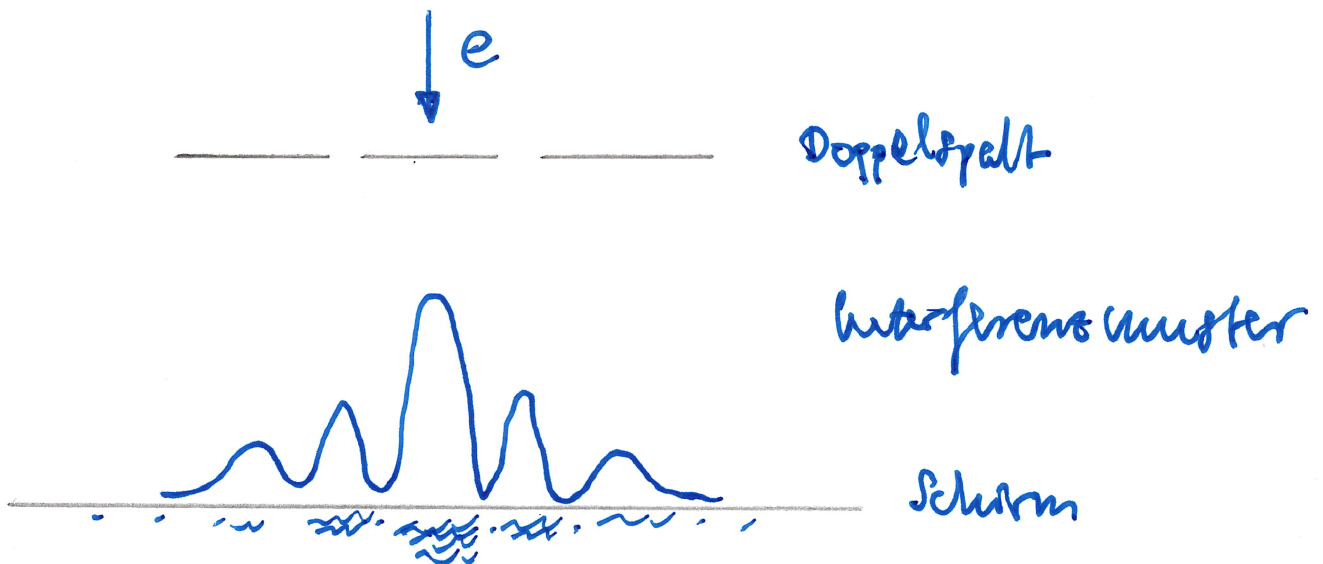
Unsere Überlegungen zu Lokalisierung & Wellenpaketen haben gezeigt, dass man keine streng deterministischen Aussagen über einzelne Teilchen machen kann

→ Unbestimmtheitsrelation; "Zerfließen"

Doppelspaltexperiment: Elektronenstrahl

trifft nach Passieren eines Doppelspalts auf einen Schirm.

Man beobachtet keine Überlagerung zweier Intensitätsmaxima sondern ein Interferenzmuster wie bei Licht



Intensität des Elektronenstrahls ist so gering, dass nur einzelne Elektronen die Apparatur passieren.

- Man beobachtet daher isolierte Punkte auf dem Schirm. Die Helligkeiten der Punkte entsprechen den Maxima des Interferenzmusters
- auftreffende Elektronen sind lokalisiert also nicht ausgedehnt,
- einzelne Elektronen erzeugen das Interferenzmuster; Interferenz wird nicht durch die Wechselwirkung zwischen Elektronen erzeugt.

Die Wahrscheinlichkeit, ein einzelnes Elektron an einem bestimmten Punkt des Schirms zu beobachten, ist dort am größten, wo ein Intensitätsmaximum vorliegt.

→ Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Born 1926)

- (1) Die Größe $\psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \equiv |\psi(\vec{x}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, ein Teilchen am Ort \vec{x} zur Zeit t anzutreffen

$|\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$: Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumenelement d^3x anzutreffen

$P(\Omega) = \int_{\Omega} d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2$: Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im endlichen Volumen Ω anzutreffen

(2) Die Verallgemeinerung von (1) lautet:

$|\psi(\vec{x}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, ein quantenmechanisches System zum Zeitpunkt t in der durch $\psi(\vec{x}, t)$ beschriebenen Konfiguration zu finden.
 ("Wellenfunktion der Unstruktur")

(3) Lineare Superposition von Wellenfunktionen
 ψ_1, ψ_2 seien die Wellenfunktionen zweier verschiedener quantenmechanischer Zustände
 (z.B. ψ_1 : Spalt 1, ψ_2 : Spalt 2)
 Die gesamte Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

$$= |\psi_1(\vec{x}, t)|^2 + |\psi_2(\vec{x}, t)|^2 + \psi_1^*(\vec{x}, t)\psi_2(\vec{x}, t) + \psi_2^*(\vec{x}, t)\psi_1(\vec{x}, t)$$

Dies entspricht der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten plus einem Interferenzterm

Bemerkungen:

- Exakte, deterministische Aussagen über einzelne Teilchen sind in der Q.M. nicht möglich

Trotzdem ist die quantenmechanische Beschreibung deterministisch insofern, als eindeutig festgelegte Anfangsbedingungen, d.h. die Kenntnis von $\psi(\vec{x}_0, t_0)$ die Wellenfunktion für alle Zeiten eindeutig festlegt.

Um Voraussagen der Q.M. mit dem Experiment zu vergleichen, muss man eine große Zahl von Messungen mit identisch präparierten Teilchen im Anfangszustand vornehmen.

Analogie zur statistischen Mechanik/Thermodynamik: Behandlung einer Vielzahl von Teilchen mit Wahrscheinlichkeitsverteilung der jeweils eindeutigen Eigenschaften

"Q.M.: Ein Teilchen mit vieldeutigen Eigenschaften"

- Falls $|\psi|^2$ mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte identifiziert wird, so muss man fordern

$$\int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$$

(Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 100%).

Mathematisch bedeutet dies dass Wellenfunktionären Elemente von $L^2(\mathbb{R}^3)$ sein müssen.

$L^2(\mathbb{R}^3)$: Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über \mathbb{R}^3 .
(unendlich-dim. Vektorraum
- Hilbertraum)

N. B.: Ebene Wellen sind nicht Elemente von $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} ; \int \psi^* \psi d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \neq 1$$

☺