1.3 Wellenpakete

Betrachte eine ebene Welle:

$$\Psi(\vec{x},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Scharfer Wert des Impulses: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\Delta\vec{p} = 0$

$\Psi(\vec{x},t)$ ist komplett delokalisiert.

Ist dies konsistent mit der Unschärferelation?

Ist eine maximale Delokalisierung physikalisch sinnvoll?

Ersetze die ebene Welle durch ein Wellenpaket, d.h. durch eine Überlagerung von ebenen Wellen:

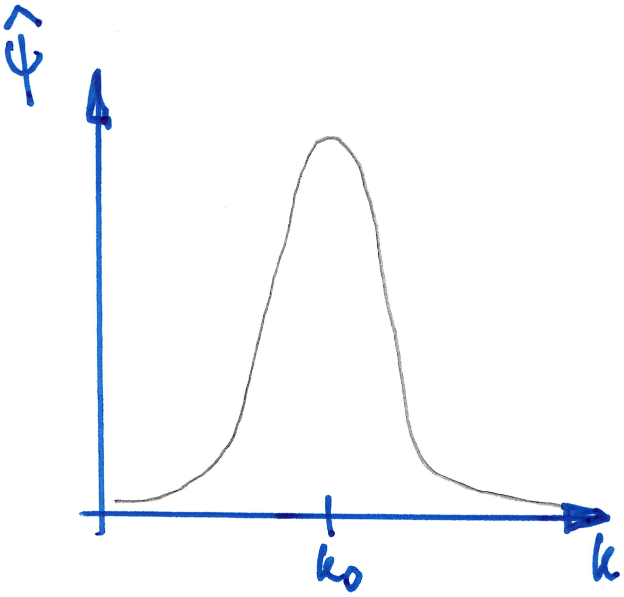
$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\; \hat{\varphi}(\vec{k})\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Die Funktion $\hat{\varphi}(\vec{k})$ sei dabei so gewählt, dass sie um einen zentralen Wert $\vec{k}_0$ herum zentriert ist.

$\curvearrowright$ scharf bestimmter Impuls wird ersetzt durch eine Impulsbreite

Welche Lokalitätseigenschaften hat $\Psi(\vec{x},t)$?

Wie verhält sich $\Psi(\vec{x},t)$ zu $\vec{x}(t)$?



Entwickle $\omega(\vec{k})$ um $\vec{k}_0$

$k_0 = |\vec{k}_0|, \quad k = |\vec{k}|$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}_k \omega(k) &= \left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k^1}, \frac{\partial\omega(k)}{\partial k^2}, \frac{\partial\omega(k)}{\partial k^3}\right) \\ &= \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\frac{\partial k}{\partial k^1}, \dots\right)\end{aligned}}$$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{\nabla}_k\,\omega(k)\Big|_{k=k_0} + O((\vec{k}-\vec{k}_0)^2)$$

mit $\quad \vec{\nabla}_k = \left(\frac{\partial}{\partial k^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial k^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial k^{(3)}}\right)$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\left\{(\vec{\nabla}_k |\vec{k}|)\frac{d\omega(k)}{dk}\right\}_{k=k_0} + \dots$$

$$= \omega(k_0) + (\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\frac{\vec{k}_0}{k_0}\frac{d\omega(k)}{dk}\Big|_{k=k_0} + \dots$$

$\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0}$ ist die Gruppengeschwindigkeit

Die Gruppengeschwindigkeit $\vec{v}_G$ ist die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schwerpunkts eines Wellenpakets.

Bsp.: Lichtwelle : $v_G \equiv |\vec{v}_G| = \frac{d\omega(k)}{dk}\Big|_{k=k_0} = \frac{d}{dk}(ck)\Big|_{k=k_0}$

$= c$

$\vec{v}_G$ zeigt in Richtung des Wellenvektors

$$\vec{v}_G = \frac{\vec{k}_0}{k_0} \left\{ \frac{d\omega(k)}{dk} \right\}_{k=k_0}$$

Mit $\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$ folgt

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + (\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{v}_G$$

Einsetzen in den Ausdruck für das Wellenpaket:

$$\Psi(\vec{x},t) \simeq \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \hat{\varphi}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_0 t - (\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{v}_G t)}$$

unabh. von Integr. variable

$$= e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{v}_G - \omega_0)t} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \hat{\varphi}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{v}_G t)}$$

$$= e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{v}_G - \omega_0)t} \underbrace{\Psi(\vec{x}-\vec{v}_G t, 0)}_{\text{Amplitude}}$$

Die Amplitude bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit $\vec{v}_G$.

Die Phasengeschwindigkeit v_p ist dagegen definiert durch

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

Für Lichtwelle ist $v_p = v_G$

Setze nun für $\omega(k)$ die Dispersionsrelation für Materiewellen ein und berechne v_G:

$$\underline{v_G} = \frac{d\omega(k)}{dk}\bigg|_{k=k_0} = \frac{d}{dk}\frac{\hbar k^2}{2m}\bigg|_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} = \underline{\frac{p_0}{m}}$$

$\rightarrow$ Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets entspricht klassischer Teilchengeschwindigkeit.

In unserer Näherung, d.h. $|\vec{k}-\vec{k}_0|$ klein, bewegt sich das Wellenpaket ohne Formänderung.

Gaußsches Wellenpaket in einer Dimension

$$\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \hat{\varphi}(k)\, e^{i(kx-\omega t)} \;, \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

(Disp. rel. für Materiewellen)

Bisher war $\hat{\varphi}(k)$ nicht weiter spezifiziert, außer dass die Funktion um k_0 herum zentriert sein sollte.

Wähle nun $\hat{\varphi}(k) = A\, e^{-(k-k_0)^2 d^2}$

$$\Rightarrow \quad |\hat{\varphi}|^2 = |A|^2\, e^{-2(k-k_0)^2 d^2}$$

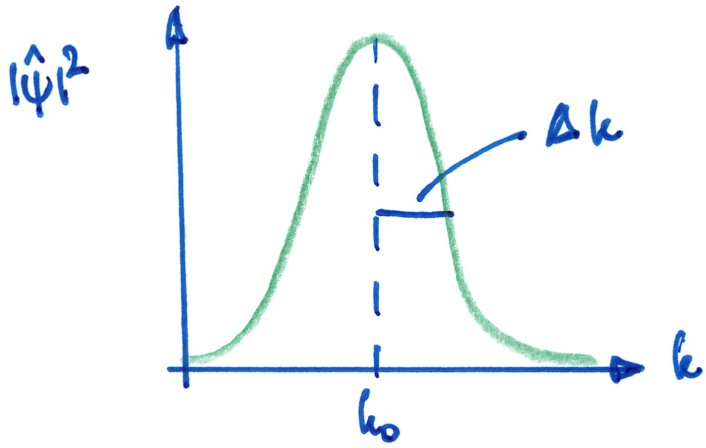
Gauß-Kurve: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

$|\hat{\psi}|^2$ entspricht einer Gauß-Kurve mit Breite

$$2d^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\sigma = \Delta k = \frac{1}{2d}$$

d.h. $$|\hat{\psi}|^2 \propto e^{-(k-k_0)^2/[2(\Delta k)^2]}$$



Berechne $\Psi(x,t)$ für den Gauß schen Ansatz:

$$\Psi(x,t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(k-k_0)^2 d^2}\, e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{-(k^2 - 2kk_0 + k_0^2)d^2 + ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m} t\right\}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{-\left[k^2\left(d^2 + i\frac{\hbar t}{2m}\right) - k\left(2k_0 d^2 + ix\right) + k_0^2 d^2\right]\right\}$$

Dies ist von der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-(ak^2 + 2bk + c)}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, a > 0$$

(Gaußsches Integral)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-(ak^2+2bk+c)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-ac)/a}$$ 1.17

mit $a = d^2 + i\frac{\hbar t}{2m}$, $\mathrm{Re}(a) = d^2 > 0$

$b = -k_0 d^2 - \frac{ix}{2} \Rightarrow b^2 = \left(k_0^2 d^4 - \frac{x^2}{4}\right) + ik_0 d^2 x$

$c = k_0^2 d^2 \Rightarrow ac = k_0^2 d^4 + i d^2 \frac{\hbar k_0^2}{2m} t$

Damit erhält man

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi}{d^2 + i\frac{\hbar t}{2m}}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{-\frac{x^2}{4} + ik_0 d^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t\right)}{d^2 + i\frac{\hbar t}{2m}}\right\}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}(\gamma + i\delta)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta}\right\}$$

mit $\alpha = -\frac{x^2}{4}$, $\beta = k_0 d^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t\right)$, $\gamma = d^2$, $\delta = \frac{\hbar t}{2m}$

Zur besseren Interpretation betrachte $|\Psi(x,t)|^2$:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{|A|^2}{2}(\gamma^2 + \delta^2)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} + c.c.\right\}$$

$$= \frac{|A|^2}{2}(\gamma^2 + \delta^2)^{-1/2} \exp\left\{\frac{2(\alpha\gamma + \beta\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}\right\}$$

$$2(\alpha\gamma + \beta\delta) = -\frac{d^2}{2}\left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t\right)^2$$

$$\gamma^2 + \delta^2 = d^2\left(d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^2}\right)$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{|A|^2}{2d\left(d^2+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2\underbrace{\left(d^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2d^2}\right)}_{=:\,(\Delta x)^2}}\right\}$$

Setze

$$\frac{|A|^2}{2d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Delta x = \sqrt{d^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2d^2}} = d\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2d^4}}$$

$$\bar{x} = \frac{\hbar k_0}{m}t,$$

dann erhält man

$$\boxed{|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta x}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2(\Delta x)^2}}}$$

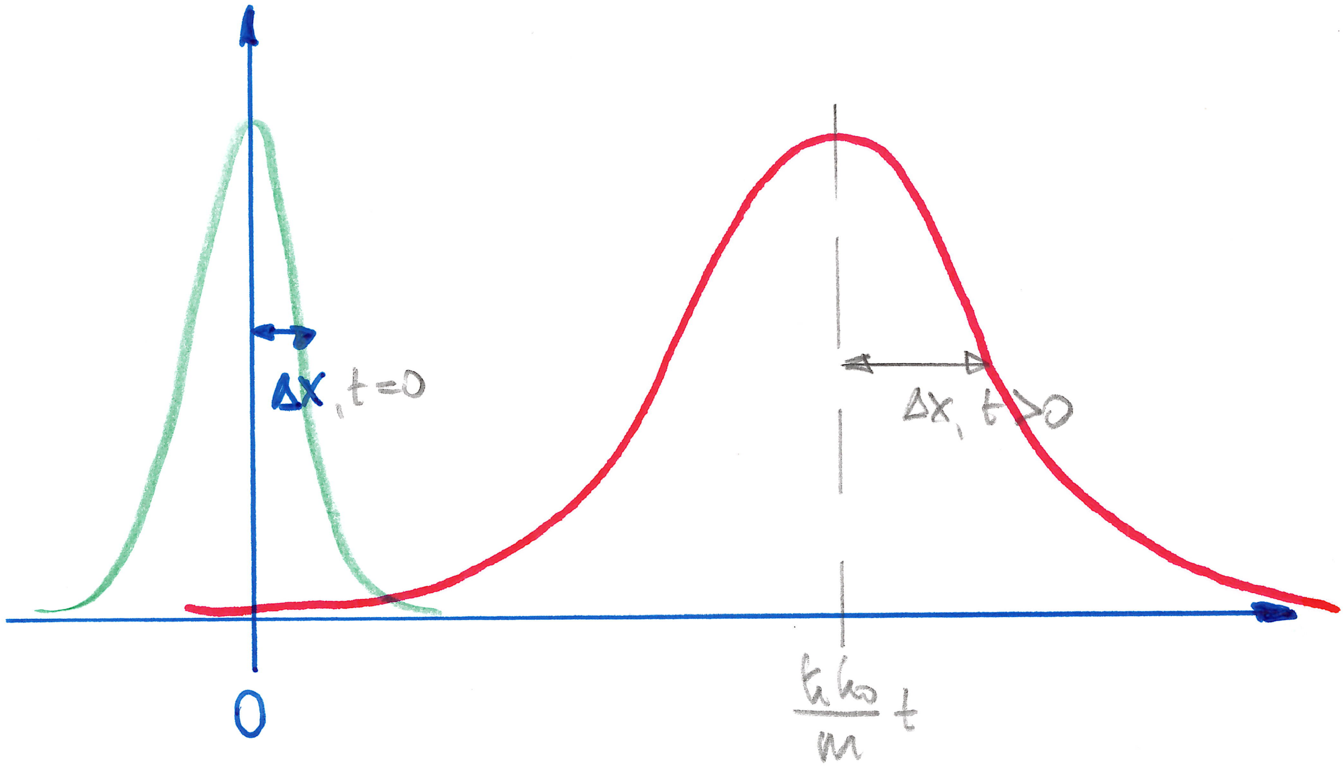
Dies ist wiederum eine Gauß-Kurve, zentriert um

$$\bar{x} = \frac{\hbar k_0}{m}t$$

und mit Breite

$$\Delta x = d\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2d^4}}$$

Unser Ergebnis sagt etwas über die Lokalisierung des Wellenpakets aus



$t=0$: Wellenpaket zentriert um $\bar{x}=0$
Breite $\Delta x = d$

$t>0$: Wellenpaket zentriert um $\bar{x} = \frac{\hbar k_0}{m} t = v_G t$

Das Maximum des Wellenpakets bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_G \equiv \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$$

die der klassischen Teilchengeschwindigkeit entspricht.

Breite : $\Delta x = d \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4 m^2 d^4}}$

nimmt zu für steigendes t.

Die Delokalisierung nimmt zu

"Zerfließen des Wellenpakets"

Für makroskopische Objekte ist dies irrelevant.

Zahlenbeispiel:

Berechne die Zeit, die für die Verdoppelung der Breite benötigt wird, d.h.

$$\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^4}} = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}\,\frac{2md^2}{\hbar}$$

(a) Elektron : $m_e = 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$, $d = 1\ \mathrm{fm}$

$$t = \sqrt{3}\cdot 2\,\frac{0.511\ \mathrm{MeV}\cdot 1\ \mathrm{fm}^2}{(3\cdot 10^8\cdot 10^{15})\frac{\mathrm{fm}^2}{s^2}\cdot 6{,}582\cdot 10^{-22}\ \mathrm{MeV\cdot s}}$$

$$\approx 3\cdot 10^{-26}\ s$$

(b) Tennisball: $m = 0.1\,\mathrm{kg}$, $d = 8\,\mathrm{cm}$

$$t = \sqrt{3}\cdot 2\,\frac{0{,}1\ \mathrm{kg}\cdot 64\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{1{,}054\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}$$

$$\simeq 2{,}1\cdot 10^{31}\ s \simeq 6.67\cdot 10^{23}\ \text{Jahre}$$

(Alter des Universums: $1{,}4\cdot 10^{10}$ Jahre)