1.2 Materiewellen

Strikte Unterscheidung zwischen Wellen- und Teilcheneigenschaften nicht haltbar

Welleneigenschaften:

- Frequenz ν $\leftrightarrow$ Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$
- Wellenvektor $\vec{k}$; $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

  $\hat{k} \equiv \vec{k} / |\vec{k}|$: Ausbreitungsrichtung

Teilcheneigenschaften:

- Energie:

  $$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} , \qquad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$$

- Impuls $\vec{p}$

Energie-Impuls-Beziehung

Beispiel: Photo-Effekt

$$E_\gamma = h \cdot \nu$$

Frequenz ν des Lichts definiert Teilcheneigenschaft, i.e. Photonenergie E_γ

Man kann über die Energie-Impuls-Beziehung dem Photon einen mechanischen Impuls zuordnen;
Ruhemasse des Photons ist Null:

$$E_\gamma = |\vec{p}_\gamma| c \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_\gamma| = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

de Broglie (1923):
Allen Materieteilchen mit Impuls $\vec{p}$ kann eine monochromatische Welle mit Richtung $\hat{p} \equiv \vec{p}/|\vec{p}|$ und Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad , \quad p = |\vec{p}|$$

zugeordnet werden (Nobelpreis 1929).

Welle-Teilchen-Dualismus:

$$E = \hbar \omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Wellenbeschreibung eines freien Materieteilchens
("frei": ohne äußere Kräfte)

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \qquad \text{Dispersionsbeziehung}$$

Vergleiche dies mit der Dispersionsbeziehung für ein Photon:

$$E = p \cdot c = \hbar k c = \hbar\omega \, .$$

$$\Rightarrow \quad \omega(k) = k \cdot c$$

Betrachte nun eine Materiewelle in einer Dimension

Ebene Welle: Ansatz für die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = A \, e^{i(kx - \omega t)}$$

Aus der Energie-Impuls-Beziehung für ein Teilchen, also

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

folgt für ω: $\quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \overset{!}{=} \hbar\omega$

$$\Rightarrow \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Also:

$$\Psi(x,t) = A \, e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}$$

Damit erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -i\frac{\hbar k^2}{2m} A e^{i\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} = -i\frac{\hbar k^2}{2m}\Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = ik\Psi(x,t) \; ; \; \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k^2\Psi(x,t)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

Das ist die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen (1 dim.), d.h. ohne Potential.

<u>In 3 Dimensionen:</u>

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x},t)$$

$\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ Laplaceoperator

Vergleiche hierzu die Wellengleichung für Licht:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(x,t) = 0$$

Für eine ebene Welle, $\phi(x,t) = C e^{i(kx-\omega t)}$, folgt daraus

$$\left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right) C e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega(k) = kc$$

Diese Dispersionsbeziehung ist konsistent mit der Herleitung aus

$$E = p \cdot c = \hbar k c \overset{!}{=} \hbar\omega \Rightarrow \omega(k) = kc$$

Aus den Energie-Impuls-Beziehungen

$$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \quad \text{bzw.} \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} \underset{m=0}{=} |\vec{p}|c$$

lassen sich die Wellengleichungen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(x,t) = 0$$

herleiten, wenn für Ψ, ϕ ebene Wellen als Lösung angenommen werden.