Übungsblatt 5

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 1.12.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Heisenbergsche Bewegungsgleichungen*

   (a) (2 Punkte) Ein Teilchen bewege sich in einem zeitunabhängigen Potential $V(\mathbf{r})$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert eine zeitunabhängigen Operators O für Eigenzustände des Hamiltonoperators zeitlich konstant ist;

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle O\rangle = 0.$$

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für stationäre Zustände

   $$\frac{1}{m}\left\langle \mathbf{p}^2\right\rangle = \langle \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r})\rangle$$

   gilt.
   Hinweis: Nutzen Sie (a) für den Operator $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$.

2. *Tunneleffekt und α-Zerfall*

   Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Näherung für Lösungen der Schrödingergleichung zu bestimmen, mit deren Hilfe der α-Zerfall leicht zu modellieren ist. Betrachten Sie dazu die Schrödingergleichung

   $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x) = E\psi(x)$$

   mit dem Ansatz

   $$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}, \quad A,\phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

   Im Folgenden nutzen wir die folgende Definition:

   $$p(x) := \sqrt{2m(E - V(x))}$$

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

   $$-\frac{p^2}{\hbar^2}A = A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2,$$

   wobei $f'(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x}$.

(b) (3 Punkte) Nehmen Sie im folgenden an, dass $|A''| \ll |A|$. Zeigen Sie, dass

$$A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}, \quad \phi(x) \approx \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $C \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist.
Hinweis: Teilen Sie die Differentialgleichung aus (a) in separate Gleichungen für den Real- und Imaginärteil auf.

Im Gamowschen Modell für den Alphazerfall wird angenommen, dass sich die Alphateilchen im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r < r_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} & r \geq r_1 \end{cases}$$

befinden, wobei r_1 der Kernradius des radioaktiven Atoms ist. Um aus dem Kern auszutreten, muss ein Alphateilchen durch den Bereich tunneln, in dem $V(r) > E$ gilt. Dieser Bereich erstreckt sich von r_1 bis $r_2 = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 E}$.
Wir wollen im Folgenden eine Näherung für den Transmissionskoeffizienten mit den bisher hergeleiteten Näherungen finden.

(c) (3 Punkte) Nehmen Sie für $r_1 < r < r_2$ den in (a) und (b) motivierten Ansatz

$$\psi(r) \approx \frac{1}{\sqrt{2m(V(r)-E)}}\left(Ce^{\gamma(r)} + De^{-\gamma(r)}\right)$$

mit $\gamma(r) = \frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r}\sqrt{2m(V(x)-E)}\,\mathrm{d}x$ an und berechnen Sie $\gamma(r)$.

(d) (3 Punkte) Der Transmissionskoeffizient kann näherungsweise durch $T \approx e^{-2\gamma(r_2)}$ ausgedrückt werden. Berechnen Sie T unter der Annahme, dass $r_1 \ll r_2$.

3. *Identitäten der Delta-Distribution*

Die δ-Distribution hat die definierende Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) (1 Punkt) $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \qquad (\alpha \neq 0)$,

(b) (2 Punkte) $\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|}\left(\delta(x-\alpha) + \delta(x+\alpha)\right)$,

(c) (2 Punkte) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\frac{d^n}{d^n x}\delta(x) = (-1)^n f^{(n)}(0)$,

(d) (2 Punkte) $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik\cdot(x-x_0)}$.