Übungsblatt 3

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 17.11.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Die Gamma-Funktion und die Maxwell-Boltzmann-Verteilung*

   Die Gamma-Funktion ist definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

   Beweisen Sie die folgenden Relationen:

   (a) (1 Punkt) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

   (b) (1 Punkt) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

   (c) (1 Punkt) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$.

   In der Vorlesung haben Sie die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$w(p) = \frac{4\pi}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}}$$

   behandelt. Im Folgenden sollen Sie einige Ergebnisse aus der Vorlesung nachrechnen:

   (d) (2 Punkte) Drücken Sie das Integral

$$f(n) = \int_0^\infty p^n e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}}$$

   mithilfe der Gamma-Funktion aus.

   (e) (1 Punkt) Folgern Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\langle T_{\text{kin}}^n \rangle = \frac{(2n+1)!!}{2^n}(kT)^n,$$

   wobei $T_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$.

(f) (1 Punkt) Verifizieren Sie die Ergebnisse

$$\langle T_{\mathrm{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T, \quad \Delta T_{\mathrm{kin}} = \sqrt{\frac{3}{2}} kT$$

aus der Vorlesung.

2. *Hermitesche Operatoren*

Auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen über $\mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt

$$(\chi, \xi) = \int \mathrm{d}^3 x \, \chi^*(x) \xi(x)$$

definiert. Für einen Operator $\mathcal{O}$, der auf diese Funktionen wirkt, ist der *adjungierte* Operator $\mathcal{O}^\dagger$ definiert durch $(\chi, \mathcal{O}\xi) = (\mathcal{O}^\dagger \chi, \xi)$. $\mathcal{O}$ heißt *hermitesch*, falls $\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O}$ gilt.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ genau dann hermitesch ist, wenn der quantenmechanische Erwartungswert $\langle \mathcal{O} \rangle = (\psi, \mathcal{O}\psi)$ reell ist.

(b) (2 Punkte) Es seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{O} = \alpha \mathcal{O}_1^m + \beta \mathcal{O}_2^n$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ hermitesch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren hermitesch sind:
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Testfunktionen, die Sie im Skalarprodukt verwenden, im unendlichen verschwinden.

i. (1 Punkt) $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$

ii. (1 Punkt) $V(x)$ für eine beliebige Funktion $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $(\chi, V\xi)$ existiert.

iii. (1 Punkt) Der Hamilton-Operator

iv. (1 Punkt) $-i\hbar\mathbf{x} \times \nabla$.

3. *Das Ehrenfest-Theorem*

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie analog zum Beweis des Ehrenfest-Theorems aus der Vorlesung, dass die zeitliche Ableitung des Erwartungswerts des Drehimpulses dem Erwartungswert des Drehmoments entspricht; d.h

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{x} \times \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{x} \times (-\nabla V) \rangle .$$

(b) (2 Punkte) Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind invariant unter Transformation $V(\mathbf{x}, t) \mapsto V(\mathbf{x}, t) + c$ für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Ansatz $\psi(\mathbf{x}, t) \mapsto \psi(\mathbf{x}, t)e^{-ict/\hbar}$ die transformierte Schrödingergleichung löst. Steht dieser zusätzliche Faktor im Konflikt mit der Newtonschen Mechanik? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) (1 Punkt) Für Observablen f gilt im allgemeinen $\langle f(x, p)\rangle \neq f(\langle x\rangle, \langle p\rangle)$. Warum findet man in makroskopischen Experimenten trotzdem Gleichheit?