Übungsblatt 2

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 10.11.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Kommutatoren* Beweisen Sie die folgenden Kommutator-Identitäten:

   (a) (1 Punkt) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

   (b) (1 Punkt) $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

   (c) (1 Punkt) $[x_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k$, wobei $L_j = \varepsilon_{jkl}x_k p_l$

   (d) (2 Punkte) $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$

   (e) (2 Punkte) $[x^n, p] = ni\hbar x^{n-1}$ and $[x, p^n] = ni\hbar p^{n-1}$

   (f) (1 Punkt) Analytische Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Taylorentwicklung

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n$$

   können für Operatoren O über ihre Wirkung auf eine Testfunktion ψ wie folgt verallgemeinert werden:

   $$f(O)\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} O^n \psi(x).$$

   Berechnen Sie $[x, \sin(p)]$.

2. *Freie Teilchen*

   Betrachten Sie die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{1}$$

   mit dem Ansatz

   $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx-\omega(k)t)}\hat{\psi}(k)\mathrm{d}k, \tag{2}$$

   wobei $\hat{\psi}(k) \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) (1 Punkt) Leiten Sie eine Dispersionsrelation $\omega(k)$ her, mit der der Ansatz (2) die Schrödingergleichung (1) löst.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie für den Fall $t = 0$ dass, wenn $\hat{\psi}$ normiert ist, auch ψ normiert ist.
Hinweis: Sie dürfen die Identität $\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$ voraussetzen.

(c) (4 Punkte) Betrachten Sie die Rechteckverteilung

$$\hat{\psi}(k) = \begin{cases} A & k_0 - \delta k < k < k_0 + \delta k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

i. Berechnen Sie den zeitunabhängigen Teil der Wellenfunktion $\psi(x) = \psi(x, 0)$.

ii. Welchen Wert muss A haben, damit die Wellenfunktion normiert ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k |\psi(k)|^2 = 1$?

iii. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle k \rangle$.

iv. Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung

$$(\Delta k)^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

3. *Klein-Gordon-Gleichung*

Leiten Sie aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ eine relativistische Version der Schrödingergleichung her. Benutzen Sie hierzu die aus der Vorlesung bekannten Entsprechungen

$$E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \vec{p} \leftrightarrow -i\hbar\nabla$$

(a) (2 Punkte) Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie diese mit dem Ansatz einer ebenen Welle:

$$\Psi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$$

(b) (3 Punkte) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung allgemein her und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für den Ansatz aus (a).
Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung von links mit Ψ^* und subtrahieren Sie davon die komplex konjugierte Gleichung. Bringen Sie anschließend dieses Ergebnis auf die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

(c) (1 Punkt) Warum kann man ρ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren?