Übungsblatt 1

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Wintersemester 2020/21

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Alexander Segner

Abgabe: Mittwoch, 03.11.2021, 12:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

Für den Erhalt der Klausurzulassung ist die Bearbeitung und Abgabe der Übungsblätter verpflichtend. In der Summe sind dabei 60% der Punkte aller Blätter zu erreichen (nicht notwendigerweise auf jedem einzelnen Blatt). Weiterhin müssen Sie mindestens einmal eine Aufgabe in den Übungsgruppen präsentiert haben. Ihre Punkte und ob Sie vorgerechnet haben, wird von Ihrem Übungsgruppenleiter dokumentiert.

1. *Gaußsche Integrale*

   Das Gaußsche Integral ist gegeben durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\ \mathrm{Re}(a) > 0.$$

   Verifiziere die folgenden Ergebnisse ($\mathrm{Re}(a) > 0$ wird im Folgenden immer angenommen):

   (a) (4 Punkte)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 \pm 2bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}\ ,$$

   (b) (3 Punkte)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

   (c) (3 Punkte)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2. *Die Zeitunabhängige Schrödingergleichung*

Zeigen Sie für die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \tag{1}$$

die folgenden Aussagen:

(a) (3 Punkte) Sind $\psi_1(\mathbf{x})$ und $\psi_2(\mathbf{x})$ Lösungen der Schrödingergleichung, so auch $\psi_0(x) = \alpha\psi_1(\mathbf{x}) + \beta\psi_2(\mathbf{x}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) (2 Punkte) Es existiert eine rein reelle Lösung.

(c) (5 Punkte) Für eine normierbare Lösung von (1) gilt:

$$E \geq V_{\min} := \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} V(\mathbf{x})$$

Sie dürfen für den Beweis annehmen, dass das Problem eindimensional und die Lösung reell ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

i. Zeigen Sie, dass wenn $E < V_{\min}$ gilt, $\psi(x)$ und $\psi''(x)$ das gleiche Vorzeichen haben.

ii. Folgern Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}, b > a$ gilt:

$$\psi(b)\psi'(b) \geq \psi(a)\psi'(a)$$

iii. Zeigen Sie, dass Gleichheit nur dann gilt, wenn $\psi(x) \equiv 0$. In diesem Fall ist $\psi(x)$ nicht normierbar.

iv. Unterscheiden Sie im Fall der Ungleichheit in ii. die Fälle $\psi(0)\psi'(0) \geq 0$ und $\psi(0)\psi'(0) < 0$ und zeigen Sie, dass in beiden Fällen $\psi(x)^2$ in jeweils einem der Grenzfälle $x \to \pm\infty$ divergiert und somit ψ nicht normierbar ist.