# Übungsblatt 11
# Theoretische Physik 3 : QM WS2020/2021
# Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

5.02.2021

## Aufgabe 1. Hyperfeinstruktur-Aufspaltung (50 Punkte)

Das Elektron und das Proton sind beides magnetische Dipole mit den magnetischen Momenten

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_e &= -g_e \frac{e}{2m_e}\vec{\mathbf{s}}_e \,, \quad g_e = 2\,,\\ \vec{\mu}_p &= +g_p \frac{e}{2m_p}\vec{\mathbf{s}}_p \,, \quad g_p = 5.59\,.\end{aligned}$$

Wie im klassischen Elektromagnetismus, wird das Magnetfeld des Protons von einem punktförmigen Dipol beschrieben als

$$\vec{\mathbf{B}}_p = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{\mu}_p\cdot\vec{\mathbf{e}}_r)\vec{\mathbf{e}}_r - \vec{\mu}_p\right] + \frac{2\mu_0}{3}\delta^{(3)}(\vec{\mathbf{r}})\vec{\mu}_p\,,$$

mit $\vec{\mathbf{e}}_r = \vec{\mathbf{r}}/r$.

Das magnetische Dipolmoment des Elektrons $\vec{\mu}_e$ wechselwirkt mit dem vom Proton erzeugten Magnetfeld. Der zugehörige Beitrag zum Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mathbf{B}}_p\,.$$

Betrachte den $l = 0$ Zustand von Wasserstoff, sodass die Kopplung zwischen dem Proton und dem Magnetfeld durch die kreisförmige Bewegung des Elektrons nicht vorhanden ist. In diesem Fall beschreibt der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{g_p e^2}{m_p m_e}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{\mathbf{s}}_p\cdot\vec{\mathbf{e}}_r)(\vec{\mathbf{s}}_e\cdot\vec{\mathbf{e}}_r) - \vec{\mathbf{s}}_p\cdot\vec{\mathbf{s}}_e\right] + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\vec{\mathbf{s}}_p\cdot\vec{\mathbf{s}}_e\delta^{(3)}(\vec{\mathbf{r}})\,,$$

vollständig die magnetische Dipolwechselwirkung des Protons und des Elektrons. Nach der Störungstheorie erster Ordnung ist die zugehörige Energieverschiebung

$$E = \langle\hat{H}\rangle = E_r + E_c\,,$$

wo $E_r$ der reguläre Beitrag und $E_c$ der Kontaktbeitrag zugehörig zum ersten und zweiten Term im Hamiltonoperator sind.

a) *(5 p.)* Erkläre warum $E_r$ für $l = 0$ verschwindet.

b) *(15 p.)* Zeige, dass die Energieverschiebung $E_c$ in Störungstheorie erster Ordnung als

$$E_c = \frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_e m_p}\frac{1}{2}(s^2 - s_e^2 - s_p^2)|\psi_{n00}(0)|^2,$$

berechnet wird, wo $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s}}_e + \vec{\mathbf{s}}_p$ und $\psi$ die Ortswellenfunktion von Wasserstoff ist.

c) *(5 p.)* Betrachte den Grundzustand. Wie viele Energieniveaus gibt es? Was ist die Entartung jedes Niveaus?

d) *(15 p.)* Leite die Energieverschiebungen für die Singlet und Triplet Grundzustände her. Berechne die numerischen Werte für die Hyperfeinaufspaltung zwischen den diesen Zuständen und die zugehörige Wellenlänge.

e) *(10 p.)* Vergleiche die GröÃenordnungen der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands mit der des $n = 2$ Zustandes. Was ist der hauptsächliche Grund warum die Hyperfeinaufspaltung kleiner als die Feinaufspaltung ist? Schätze die GröÃenordnung ihres Verhältnisses ab.

## Aufgabe 2. Magnetische Resonanz (50 Punkte)

Die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Neutrons $\vec{\mu}_n$ mit einem externen Magnetfeld $\vec{\mathbf{B}}$ wird durch den (Wechselwirkungs-) Hamilton

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{\mathbf{B}}\,.$$

beschrieben. Das magnetische Moment des Neutrons wird dabei über den Spin 1/2-Vektor $\vec{\mu}_n = \gamma_n \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ beschrieben, wobei $\gamma_n < 0$ das gyromagnetische Verhältnis ist und $\vec{\sigma}$ die Paulimatrizen sind.

a) *(10 p.)* Nimm zuerst ein konstantes Magnetfeld

$$\vec{\mathbf{B}} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z\,,$$

an. Dabei ist $\hat{\mathbf{e}}_z$ der Einheitsvektor entlang der $z$-Achse und $B_0$ eine Konstante.

Schreibe für diesen Fall den Hamilton-Operator $\hat{H}$ als eine $2 \times 2$ Matrix. Verwende dabei die *Larmorfrequenz* $\omega_0 \equiv -\gamma_n B_0$ und berechne die Eigenwerte.

b) *(5 p.)* Zur Zeit $t_0$ trit das Neutron in einen Hohlkörper ein, wo es zusätzlich zum konstanten Magnetfeld in $z$-Richtung, nun noch eine rotierende Komponente in der $x, y$-Ebene spürt:

$$\vec{\mathbf{B}} = B_1 \cos\omega t\, \hat{\mathbf{e}}_x + B_1 \sin\omega t\, \hat{\mathbf{e}}_y + B_0 \hat{\mathbf{e}}_z\,.$$

Dabei ist $\omega$ die (von außen gesteuerte) Frequenz des rotierenden Feldes und $B_1$ die Amplitude dieses Feldes.

Schreibe nun für diesen Fall den Hamilton-Operator $\hat{H}$ als $2 \times 2$ Matrix. Verwende die Notation $\omega_0 \equiv -\gamma_n B_0$ und $\omega_1 \equiv -\gamma_n B_1$.

c) *(10 p.)* Der Spin 1/2 Zustand des Neutrons zu einer gegebenen Zeit $t$ ist (in Matrix-Notation) gegeben durch:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix}\,.$$

Wo $c_+(t)$ und $c_-(t)$ die Amplituden des Spin-Up- bzw. des Spin-Down-Zustandes sind.

Berechne die Zeitentwicklung von $c_\pm(t)$ für $t \geq t_0$ über die zeitabhängige Schrödingergleichung: $\hat{H}\Psi(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)$.

d) *(15 p.)* Schreibe die Differenzialgleichungen für $c_+(t)$ und $c_-(t)$ auf und löse sie für die Resonanzbedingung $\omega = \omega_0$.

*Hinweis:* verwende

$$c_+(t) = e^{-\frac{i}{2}\omega_0(t-t_0)}\beta_+(t)\,,$$
$$c_-(t) = e^{+\frac{i}{2}\omega_0(t-t_0)}\beta_-(t)\,,$$

und schreibe die entsprechenden Differenzialgleichungen für $\beta_\pm(t)$, die leicht gelöst werden können. Drücke die Lösungen als Funktionen der Zeitdifferenz $(t - t_0)$ und als Funktion der Anfangsbedingungen $c_+(t_0)$ und $c_-(t_0)$ aus.

e) *(10 p.)* Mit der erhaltenen Lösung kann man nun den Spin-Zustand dees Neutrons nach Durchqueren des Hohlraums *z. B.* zur Zeit $t_1$ schreiben als:

$$\begin{pmatrix} c_+(t_1) \\ c_-(t_1) \end{pmatrix} = U(t_1, t_0) \begin{pmatrix} c_+(t_0) \\ c_-(t_0) \end{pmatrix} .$$

Wobei die $2 \times 2$ Matrix $U$ geschrieben werden kann als:

$$U(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\chi} \cos\phi & -ie^{-i\delta} \sin\phi \\ -ie^{+i\delta} \sin\phi & e^{+i\chi} \cos\phi \end{pmatrix} ,$$

Benutze deine Lösung von oben um $\chi, \delta$, und $\phi$ nur über $\omega_0, \omega_1, (t_1 - t_0)$, und $(t_1 + t_0)$ auszudrücken.