Probeklausur
Theoretische Physik 3 : QM WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

12.02.2021

Aufgabe 1. Allgemeine Fragen. (20 Punkte + 10 Bonus)

1.1. *(5 p.) Impulsraum.*

Betrachte die Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung

$$\langle x|\psi_0\rangle = A_0\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Nutze

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

und berechne $\langle p|\psi_0\rangle$.

1.2. *(5 p.) Verschiebungsoperator.*

Betrachte den Operator $\hat{T}(a) \equiv e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator und a ein reeller Parameter ist.

a) Ist der Operator eine Observable? Warum?

b) Zeige, dass $\hat{T}(a)\,\psi(x) = \psi(x+a)$.

1.3. *(5 p.) Zeitentwicklungsoperator.*

Nehme an, dass $\hat{H}$ der *zeitunabhängige* Hamiltonian ist.

a) Zeige, dass der Operator $\hat{U}(t-t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$ unitär ist.

b) Zeige, dass sich die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung wie folgt ergibt

$$\Psi(x,t) = \hat{U}(t-t_0)\Psi(x,t_0),$$

wobei $\Psi(x,t_0)$ eine gegebene Wellenfunktion des Systems zur Zeit t_0 ist.

1.4. *(5 p.) Messungen.*

Betrachte zwei Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$.
$\hat{A}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten a_1 beziehungsweise a_2.
$\hat{B}$ besitzt zwei normierte Eigenzustände $|b_1\rangle$ und $|b_2\rangle$, mit den zugehörigen Eigenwerten b_1 beziehungsweise b_2.
Nehme an, dass die Eigenzustände wie folgt zusammenhängen

$$|a_1\rangle = \frac{3}{5}\,|b_1\rangle + \frac{4}{5}\,|b_2\rangle \qquad |a_2\rangle = \frac{4}{5}\,|b_1\rangle - \frac{3}{5}\,|b_2\rangle\,.$$

a) Die Messung der Observable $\hat{A}$ ergibt den Wert a_1. In welchem Zustand befindet sich das System (direkt) nach der Messung?

b) Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten für eine nachfolgende Messung von $\hat{B}$?

c) Direkt nach der Messung von $\hat{B}$ wird $\hat{A}$ erneut bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit a_1 zu erhalten?

1.5. *(Bonus 10 p.) Eigenfunktionen und Entartungen.*

a) *(2 p.)* Was ist der Entartungsgrad für die Energie eines freien Teilchens in einer Dimension?

b) *(3 p.)* Ist der Grundzustand eines unendlichen Potentialtopfes eine Impulseigenfunktion? Falls ja, was ist der Impuls des Zustands? Falls nicht, warum nicht?

c) *(5 p.)* Nutze die Schrödingergleichung um zu zeigen, dass in einer Dimension keine entarteten gebundenen Zustände existieren.

Aufgabe 2. Halb-harmonischer Oszillator. (25 Punkte + 5 Bonus)

Betrachte ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension in einem *"halb"*-harmonischen Potential $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

bewegt.

a) *(5 p.)* Stelle für $x \geq 0$ die *stationäre* Schrödingergleichung auf. Nutze dabei die dimensionslosen Grö"sen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}.$$

b) *(5 p.)* Zeige, dass das asymptotische Verhalten der Lösung für gro"se y durch $e^{-y^2/2}$ gegeben ist.

c) *(7 p.)* Durch Separation des asymptotischen Verhaltens für $y \to \infty$, definieren wir

$$\psi(y) = h(y)e^{-y^2/2}.$$

Bestimme die Gleichung für $h(y)$, $y \geq 0$.

d) *(8 p.)* Die Eigenfunktionen des Hamiltonian des *regulären* quantenmechanischen harmonischen Oszillators lassen sich bekannterweise durch Hermitesche Polynome ausdrücken:

$$\psi_n(y) \propto H_n(y)e^{-y^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

wobei die Hermiteschen Polynome $H_n(y)$ die folgende Gleichung erfüllen

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

und gleichwertig durch

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-y^2}.$$

definiert werden können. Bestimme das Spektrum für den Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials.

e) *(Bonus 5 p.)* Die Hermiteschen Polynome sind normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, H_n(y)H_m(y)e^{-y^2} = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Was sind die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes im Fall des gegebenen *"halb"*-harmonischen Potentials?

Aufgabe 3. Stark-Effekt. (25 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Verschiebung des Energiespektrums eines Wasserstoffatoms innerhalb eines statischen elektrischen Feldes. Hierzu nutzen wir die Störungstheorie in erster Ordnung.

Betrachte ein Elektron im $n = 2$ Zustand des Wasserstoffatoms. Das elektrische Dipolmoment $\vec{d} = -e\vec{r}$ des Elektrons wechselwirkt mit einem externen elektrischen Feld $\vec{E}$ durch

$$\hat{H}'_E = -\vec{d} \cdot \vec{E},$$

was sich als Störung des Coulomb-Potential behandeln lässt.

Nehme ein konstantes elektrisches Feld entlang der x-Achse an:

$$\vec{E} = E_0 \, \vec{e}_x.$$

Die ungestörten Eigenzustände $|n \, l \, m_l\rangle$ (unter Vernachlässigung des Spins) werden mit

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv |2\,0\,0\rangle, \\ |2\rangle &\equiv |2\,1\,0\rangle, \\ |3\rangle &\equiv |2\,1\,+1\rangle, \\ |4\rangle &\equiv |2\,1\,-1\rangle, \end{aligned}$$

bezeichnet.

a) *(15 p.)* Die Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms sind gegeben durch

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \, Y_{l,m_l}(\theta, \phi).$$

Gegeben sind die Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{1,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{\pm i\phi}, \end{aligned}$$

und das radiale Integral

$$\int_0^\infty dr \, r^3 R_{2,0}(r) R_{2,1}(r) = 3\sqrt{3} \, a,$$

mit dem Bohr-Radius a.

Bestimme die 4×4 Matrix-Form von $\hat{H}'_E$ in der ungestörten Basis und nutze $\Omega_e \equiv eE_0 \frac{a}{\hbar}$.

Hinweis: Argumentiere unter Ausnutzung von Symmetrierelationen, dass viele der Winkelintegrationen null ergeben.

b) *(10 p.)* Diagonalisiere die obige Matrix um die Korrekturen erster Ordnung, welche sich durch $\hat{H}'_E$ ergeben, für alle vier $n = 2$ Level zu bestimmen (Es müssen nur die Eigenwerte und nicht die Eigenzustände bestimmt werden).

Skizziere qualitativ die Energie der $n = 2$ Level als Funktion des extern angelegten elektrischen Feldes E_0. Kommentiere ihre Entartung.

Aufgabe 4. Spin-1/2 in einem Magnetfeld. (30 Punkte)

Das Neutron ist ein Spin- Teilchen. Sein magnetisches Moment $\vec{\mu}_n$ wird über seinen Spin durch $\vec{\mu}_n = \gamma_n \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ beschrieben, wobei $\gamma_n < 0$ das gyromagnetische Verhältnis und $\vec{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen ist:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Kopplung des magnetischen Momentes an ein externes magnetisches Feld $\vec{B}$ wird durch den (Wechselwirkungs-)Hamiltonian

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B}$$

beschrieben.

Betrachte ein gleichförmiges Magnetfeld $\vec{B}$ mit einer konstanten Komponente entlang der z-Achse und einer rotierenden Komponente in der xy-Ebene:

$$\vec{B} = B_1 \vec{e}_x \cos\omega(t_0 + t) + B_1 \vec{e}_y \sin\omega(t_0 + t) + B_0 \vec{e}_z,$$

wobei B_0 and B_1 konstante Amplituden sind und ω die extern vorgegebene Frequenz bezeichnet.

a) *(5 p.)* Gebe $\hat{H}$ als 2×2 Matrix an. Verwende $\omega_0 \equiv -\gamma_n B_0$ and $\omega_1 \equiv -\gamma_n B_1$.

b) *(5 p.)* Der Spin- Zustand des Neutrons zur Zeit t ist (in Matrix Notation) gegeben durch

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{bmatrix},$$

wobei $c_+(t)$ und $c_-(t)$ die Amplituden des Spin-Up- beziehungsweise des Spin-Down-Zustandes sind.

Nutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t),$$

um das Gleichungssystem zu finden, welches die Zeitentwicklung von $c_\pm(t)$ beschreibt.

c) *(5 p.)* Betrachte im Folgenden den Resonanzfall $\omega = \omega_0$. Verwende

$$\begin{aligned} c_+(t) &= e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} \beta_+(t), \\ c_-(t) &= e^{+\frac{i}{2}\omega_0 t} \beta_-(t), \end{aligned}$$

und bestimme die entsprechenden Differentialgleichungen für $\beta_\pm(t)$.

d) *(10 p.)* Zeige, dass mit den Anfangswerten $c_+(0)$ und $c_-(0)$ zur Zeit $t = 0$ die allgemeine Lösung für $c_+(t)$ gegeben ist durch

$$c_+(t) = e^{-i\chi} \cos\phi \; c_+(0) - ie^{-i\delta} \sin\phi \; c_-(0) ,$$

mit $\phi \equiv \frac{\omega_1}{2} t$, $\chi \equiv \frac{\omega_0}{2} t$ und $\delta \equiv \frac{\omega_0}{2}(t + 2t_0)$.

e) *(5 p.)* Nutze die allgemeine Lösung für $c_\pm(t)$, welche durch

$$\begin{bmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\chi} \cos\phi & -ie^{-i\delta} \sin\phi \\ -ie^{+i\delta} \sin\phi & e^{+i\chi} \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_+(0) \\ c_-(0) \end{bmatrix},$$

gegeben ist und bestimme die Wahrscheinlichkeiten das Neutron zur Zeit t im Spin-Up- beziehungsweise Spin-Down-Zustand zu finden.

Skizziere die Wahrscheinlichkeiten für $c_-(0) = 0$.