Übungsblatt 8
Theoretische Physik 3 : QM WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

15.01.2021

Übung 1. Unendlicher sphärischer Potentialtopf (30 points)

Betrachte ein Teilchen in einem unendlichen 3D-Potentialtopf des Radius a,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a, \\ +\infty & r \leq a. \end{cases}$$

a) *(15 p.)* Zeige, dass die Lösung der Schrödinger-Gleichung die folgende ist

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) \propto j_l \left(\beta_{nl} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

und $j_l(x)$ ist die sphärische Bessel-Funktion der Ordnung l, die wie folgt definiert ist:

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^l \frac{\sin x}{x}.$$

$j_l(x)$ ist die nichtsinguläre Nulllösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[x^2 - l(l+1) \right] y = 0.$$

β_{nl} ist die n-te Null der sphärischen Bessel-Funktionen der Ordnung l: $j_l(\beta_{nl}) = 0$.

b) *(15 p.)* Die sphärischen Bessel-Funktionen sind ein spezieller Fall der Bessel-Funktionen $J_\alpha(x)$ definiert als:

$$J_\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2l+\alpha},$$

denn α ist halbzahlig, also $J_{l+1/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, j_l(x)$.

Berechne mit der Definition der Bessel-Funktionen $J_{1/2}$ und $J_{3/2}$ und prüfe, ob die Beziehung zwischen $J_{l+1/2}$ und j_l tatsächlich richtig ist.

Hinweis: Beweise $l!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l+1))2^l = (2l+1)!$.

Mathehinweise:

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\Gamma(m + 1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}$$

Übung 2. Wasserstoffatom (20 + 10 points)

Die normierten Wasserstoffwellenfunktionen sind:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[a(n+l)!]^3}}\, e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L^{2l+1}_{n-l-1}(\tfrac{2r}{na})\, Y^m_l(\theta,\phi),$$

Wobei $L^p_{q-p}(x)$ die zugehörigen Laguerre-Polynome sind und $Y^m_l(\theta,\phi)$ die Kugelflächenfunktionen sind.

a) *(5 p.)* Stelle dir vor, das Elektron befindet sich im Zustand $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_{nl}(r)$ es irgendwo zu finden?

b) *(15 p.)* Überprüfe explizit, dass $P_{nl}(r)$ für $n=3$ richtig auf Eins normalisiert ist.
Hinweis: Benutze $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}x^n = n!$.

c) *(10 p.) (Bonus)* Zeige, dass $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}x^n = n!$.

Übung 3. 2D quanten harmonischer Oszillator. (50 + 20 points)

a) *(10 p.)* Vorausgesetzt, Lösungen für den eindimensionalen Fall sind bereits bekannt, löse das Problem des zweidimensionalen isotropen quanten harmonischen Oszillators in kartesischen Koordinaten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\psi(x,y) = E\psi(x,y).$$

Hinweis: Verwende die Methode der Variablentrennung: $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$. Schreibe dann getrennte Gleichungen für $X(x)$ und $Y(y)$ auf.

b) *(5 p.)* Schreiben das Energiespektrum auf. Wie hoch ist der Grad der Entartung der Energieniveaus?

c) *(10 p.)* Zeige, dass der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in den Polarkoordinaten die Form annimmt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

d) *(10 p.)* Schreibe den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ in Polarkoordinaten und zeige, dass $[\hat{H},\hat{L}_z] = 0$.

e) *(10 p.)* Betrachte den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator in Polarkoordinaten. Trennen Sie die Variablen $\psi(r,\phi) = v(r)u(\phi)$ und erhalten Sie Gleichungen für $v(r)$ und $u(\phi)$.

Die Gleichung für $v(r)$ kann schließlich in die für die generalisierten Laguerre-Polynome umgewandelt werden $L^{|M|+1}_{n_r}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)$. Dann erhält man die endgültige Lösung

$$\psi_{n_rM}(r,\phi) = C_{n_rM}\, r^{|M|} e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}r^2} L^{|M|+1}_{n_r}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)e^{iM\phi}$$

mit dem Spektrum

$$E = \hbar\omega(|M|+1+2n_r), \quad n_r = 0,1,2,\dots, \quad M = 0,\pm1,\pm2,\dots\ ,$$

Wobei M die Quantenzahl ist, die $\hat{L}_z$ entspricht.

f) *(5 p.)* Finde Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ in Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass der vollständige und orthonormale Satz von Eigenfunktionen sowohl für $\hat{H}$ als auch für $\hat{L}_z$ gilt.

g) *(20 p.) (Bonus)* Finde die Grundzustandslösung der Schröder-Gleichung ($n_r = 0, M = 0$) in Polarkoordinaten.
Hinweis: Setze $E = \hbar\omega$, $u''(\phi) = 0$ und ersetze $v(r) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}F(r)$.