Übungsblatt 6
Theoretische Physik 3 : QM WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

11.12.2020

Übung 1. (35 Punkte)

Erinnere dich an den eindimensionalen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator mit dem Spektrum gegeben durch

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

und den stationären Zuständen $|n\rangle$:

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Erinnere dich an die Leiteroperatoren

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(m\omega x \mp i\hat{p}),$$

welche auf $|n\rangle$ wie folgt wirken:

$$a_+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ , \qquad a_-\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ .$$

Wir wissen, dass $|n\rangle$ eine vollständige ONB in unserem Hilbert-Raum bilden. In einer solchen *diskreten* Basis wird ein Vektor als unendliche diskrete Spalte von Werten dargestellt, während ein Operator durch unendlich dimensionale Matrizen beschrieben wird. Betrachte Matrixdarstellungen von $\hat{H}$-, $\hat{x}$- and $\hat{p}$-Operatoren in dieser Basis.

a) *(5 p.)* Schreibe die Matrixdarstellung des Hamiltonian $H_{nm} = \langle n|\,\hat{H}\,|m\rangle$ auf.

b) *(10 p.)* Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für $\langle x|n\rangle$ auszunutzen, dass

$$\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

Hinweis: Drücke $\hat{x}$ durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

c) *(10 p.)* Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für $\langle x|n\rangle$ auszunutzen, dass

$$\langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

Hinweis: Drücke $\hat{p}$ durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

d) *(10 p.)* Bestimme mit gegebenem $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$ die räumliche Darstellung des Hamiltonian

$$\langle x|\,\hat{H}\,|x'\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\delta(x-x').$$

Beachte, dass wir die "übliche" Operatorform des Hamiltonian erhalten, wenn wir diesen in obiger Form auf Zustände in räumlicher Darstellung wirken lassen:

$$\int \mathrm{d}x'\ \langle x|\,\hat{H}\,|x'\rangle\,\langle x'|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x'\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\delta(x-x')\,\langle x'|\psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\langle x|\psi\rangle\,,$$

wobei $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$.

Beachte, dass alle Vektoren und Operatoren Größen sind, welche invariant unter Basiswechsel sind. Darstellungen in gewählten Basen (Räumen) sind einfach verschiedene Wege um dieselbe Größe zu beschreiben.

Übung 2. Hermitesche Operatoren (30 Punkte)

In dieser Übung wirst du ein paar Theoreme beweisen, welche für die Quantenmechanik höchst relevant sind.

a) *(5 p.)* **Theorem I:** Falls zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren und $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ ist, so ist $\hat{B}\,|\psi\rangle$ ebenfalls ein Eigenvektor von $\hat{A}$ mit den selben Eigenwerten.

b) *(5 p.)* **Theorem II:** Falls zwei Observablen A und B kommutieren und $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten von $\hat{A}$ sind, so verschwindet das Matrixelement $\langle\psi_1|\,\hat{B}\,|\psi_2\rangle$.

c) *(15 p.)* **Theorem III:** Falls zwei Observablen A und B kommutieren, kann man für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ eine gemeinsame Orthonormalbasis aus Eigenvektoren konstruieren. Betrachtet nur den Fall, in welchem die Spektren von A und B diskret sind.
Hinweis: Da A eine Observable ist, gibt es mindestens eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\hat{A}$:

$$\hat{A}\,|u_n^i\rangle = a_n\,|u_n^i\rangle\,, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad i = 1,2,\ldots,g_n,$$

wobei g_n der Grad der Entartung der Eigenwerte a_n beschreibt and $\langle u_n^i|u_m^j\rangle = \delta_{nm}\delta_{ij}$ gilt. Diskutiere die Matrixelemente $\langle u_n^i|\hat{B}|u_m^j\rangle$.

d) *(5 p.)* Zeige die Umkehrung von Theorem III.

Übung 3. Operatoren und Dirac Notation (35 Punkte)

a) *(5 p.)* Betrachte die Leiteroperatoren für das Problem des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Zeige, dass

$$\hat{a}_+ = (\hat{a}_-)^\dagger.$$

b) *(5 p.)* Zeige, dass für jede Observable $\hat{q}$ mit *nicht-entartetem* Spektrum gilt

$$\hat{q} = \sum_q q\,|q\rangle\,\langle q|\,,$$

wobei $\hat{q}\,|q\rangle = q\,|q\rangle$ und im Fall eines kontinuierlichen Spektrums $\sum_q \to \int \mathrm{d}q$ gilt.
Hinweis: Da die Menge der Eigenfunktionen vollständig und orthonormal ist, kann die folgende Vollständigkeitsrelation genutzt werden:

$$\sum_q |q\rangle\,\langle q| = \hat{1}.$$

c) *(5 p.)* Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Zeige nun, dass

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\,\langle p|\psi\rangle\,.$$

d) *(5 p.)* Zeige, dass

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\,\phi^*(p)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right]\phi(p),$$

wobei

$$\phi(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$$

e) *(5 p.)* Zeige, dass

$$\left\langle x\middle|\hat{p}\middle|x'\right\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x').$$

f) *(10 p.)* Erinnere dich an die Wellenfunktion des stationären Zustandes im unendlichen rechteckigen Potentialtopf

$$\langle x|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $\langle p|n\rangle$.