Übungsblatt 5
Theoretische Physik 3 : QM WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

04.12.2020

## Übung 1. Endlicher quadratischer Potentialtopf (20 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich in einem endlichen quadratischen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2a} & \text{for } -a \le x \le a \\ 0 & \text{for } x > |a| \end{cases}.$$

Die Energielevel sind durch folgende Bedingung gegeben:

$$z \tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

wobei

$$z = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{2a}\right)}, \qquad z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}.$$

a) *(10 p.)* Betrachte das Limit $a \to 0$ und nimm an, $E$ sei in diesem endlich. Zeige, dass du den eindeutigen gebundenen Zustand des $\delta$-Potentials $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ erhältst.

b) *(10 p.)* Was muss der Wert von $m\alpha a/\hbar^2$ sein, damit das System exakt n gebundene Zustände hat?

## Übung 2. (35 + 10 Punkte)

Betrachte die Schrödingergleichung mit dem folgenden Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ V_1 & x > a. \end{cases}$$

a) *(10 p.)* Betrachte gebundene Zustände des Systems ($E < 0$). Leite die transzendente(n) Gleichung(en) für die Energie-Quantenzahl her. Beachte, dass im Fall $V_1 = 0$ die Ausdrücke der endlichen Potentialwand aus der Vorlesung erhalten werden sollten.

b) *(10 p.)* Schreibe die Eigenfunktionen für den Hamiltonoperator im Fall $0 < E < V_1$.
Skizziere eine Eigenfunktion für einen mittleren Wert von $E$.

c) *(5 p.)* Zeige, dass im Limit $V_1 \to +\infty$ die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators für $x > a$ verschwinden.
Stimmt es, dass nicht nur die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators, sondern *alle* alle Wellenfunktionen für $x > a$ verschwinden müssen?

d) *(10 p.)* Betrachte die gestreuten Zustände für den Fall $E > V_1$. Leite Ausdrücke für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten her.

e) *(10 p.)*(*Bonus*) Betrachte das Limit $V_1 \to +\infty$. Beweise, dass das System keine gebundenen Zustände zulässt genau dann wenn $V_0 \le \pi^2\hbar^2/(8ma^2)$.

## Übung 3. WKB-Näherung (30 + 10 Punkte)

Betrachte das Potential $V(x)$ in Abb. 1

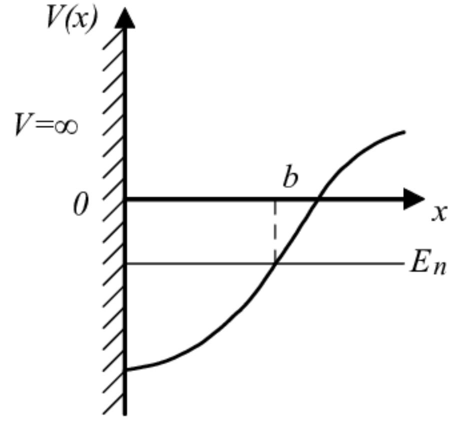


Abbildung 1:

Rechts von dem Wendepunkt $b$ hat die Wellenfunktion die semi-klassische Form:

$$\Psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_b^x |p(x)|dx\right) , \quad x > b\,. \tag{1}$$

In dem Bereich $x < b$ wird die Wellenfunktion beschrieben durch:

$$\Psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b p(x)dx + \frac{\pi}{4}\right) , \quad x < b\,. \tag{2}$$

a) *(5 p.)* Leite die folgende Beziehung der Energieniveaus her:

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^b \sqrt{2m[E_n - V(x)]}dx = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right) .$$

b) *(5 p.)* Betrachte nun (für Aufgaben b), c), d) und e) ), das explizite Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{für } x \geq a \\ \infty & \text{für } x < a \end{cases} \qquad \alpha > 0\,.$$

Unter welchen Bedingungen und für welche Werte von $x$ kann die semi-klassische Näherung verwendet werden?

c) *(10 p.)* Leite mit dem Ergebnis von a) und mithilfe einer Integration die Beziehung der Energieniveaus $E_n$ her.

d) *(10 p.)* Finde einen expliziten Ausdruck für die oberen Energieniveaus, welche durch die Bedingung $|E_n| \ll \alpha/a^2$ definiert sind. Erweitere das Ergebnis von c) mit dem kleinen Parameter $|E_n|a^2/\alpha$. Behalte nur die führende Ordnung. Wie verändert sich der Abstand der Energieniveaus mit wachsendem $n$?

e) *(10 p.)(Bonus)*. Finde die explizite Form der Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$.

## Übung 4. Matrizen: Eigenwerte und Eigenvektoren. (15 Punkte)

a) *(2 p.)* Betrachte die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$, $\sigma_z^2$, sowie die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

b) *(3 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\sigma_x, \sigma_y$ and $\sigma_z$.

c) *(5 p.)* Berechne ebenso die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2D- and hyperbolischen Drehungsmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix}.$$

d) *(5 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden $3 \times 3$ Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$