

Übungsblatt 3
Theoretische Physik 3 : WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

20.11.2020

Übung 1. (35 Punkte)

Betrachte einen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator (HO), dessen zeitunabhängige Grundzustandswellenfunktion gegeben ist durch

$$\Psi_0(x, t = 0) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \equiv \alpha e^{-\frac{y^2}{2}},$$

wobei zur Vereinfachung $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ und die dimensionslose Variable $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ eingeführt wurde.

a) (5 p.) Nutze die explizite Definition des Aufsteigeoperators

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(-i\hat{p} + m\omega x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dy} + y \right),$$

um einen Ausdruck für die Wellenfunktion Ψ_1 des ersten angeregten Zustandes zu finden und prüfe deren Orthogonalität mit Ψ_0 .

b) (20 p.) Bestimme $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$ für Ψ_0 und Ψ_1 durch explizite Integration.

c) (5 p.) Überprüfe für beide Zustände die Unschärferelation.

d) (5 p.) Berechne die Erwartungswerte der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und der potentiellen Energie $\langle V \rangle$. Überprüfe, dass sich beide zu $\langle H \rangle$ addieren.

Übung 2. Potenzreihenmethode (65 Punkte)

Der quantenmechanische HO lässt sich über einen Potenzreihenansatz lösen. Dazu beginnt man mit der stationären Schrödinger-Gleichung ($\Psi'' \equiv d^2\Psi/dx^2$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \Psi(x) = E \Psi(x).$$

a) (10 p.) Um die Problemstellung zu vereinfachen, umschreibe die obige Gleichung mit den dimensionslosen Größen

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \varepsilon = E/\hbar\omega.$$

Definiere außerdem $\varphi(y) = c\Psi(x)$ und bestimme c so dass $\varphi(y)$ normiert ist.

b) (10 p.) Untersuche das asymptotische Verhalten der Gleichung für große y . Zeige, dass für $y \rightarrow \infty$

$$\varphi(y) \sim e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

- c) (10 p.) Nun kann das asymptotische Verhalten der unbekanntes Funktion explizit ausgedrückt werden:

$$\varphi(y) = h(y) e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Leite folgende Gleichung für $h(y)$ her:

$$h'' - 2yh' + (2\varepsilon - 1)h = 0.$$

- d) (15 p.) Setze nun voraus, dass $h(y)$ als unendliche Potenzreihe in y geschrieben werden kann

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m.$$

Bestimme die Rekursionsrelation zwischen den Koeffizienten a_m und zeige, dass sich zwei unabhängige Lösungsmengen (*gerade* und *ungerade*) ergeben.

Zeige, dass die unendliche Reihe an einem endlichen n abgeschnitten werden muss: $a_{m>n} = 0$, damit die Wellenfunktion endlich und normierbar bleibt.

(*Hinweis:* Betrachte die Maclaurin-Entwicklung von e^{y^2} und vergleiche sie mit dem Verhalten der Reihe für große y).

- e) (15 p.) Zeige, dass die unendliche Potenzreihe an einer natürlichen Zahl n "abgeschnitten" werden muss, damit die Wellenfunktion endlich und normalisierbar ist: $a_{m>n} = 0$.

(*Tipp:* Betrachte die Maclaurin Reihe von e^{y^2} und vergleiche sie mit dem Verhalten der Reihe für große y).

- f) (5 p.) Obige Schlussfolgerung ausnutzend, zeige, dass die Energie durch $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ quantisiert ist.

Die resultierenden Polynome $h_n(y)$ sind proportional zu den *Hermiteischen Polynome* $H_n(y)$. Die orthonormale Lösungsmenge der ursprünglichen Schrödinger-Gleichung ergibt sich somit zu:

$$\Psi_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

(Bonus) Übung 3. Supersymmetrische QM (50 Punkte)

In dieser Aufgabe wird eine Verallgemeinerung der Auf- und Absteigeoperatoren betrachtet. Für ein gegebenes Potential $V_-(x)$, wird hierbei ein Partnerpotential $V_+(x)$ konstruiert, welches die identischen Eigenwerte besitzt, bis auf den Grundzustand. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann nun das Potential $V_-(x)$ so verschoben werden, dass der zugehörige Grundzustand $\psi_0(x)$ eine verschwindende Energie $E_0^- = 0$ besitzt.

- a) (10 p.) Zeige, dass der Hamiltonian $H_- = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-$ in folgender Form schreiben lässt

$$H_- = A^+ A$$

wobei

$$A^+ \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(-\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right),$$

$$A \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right),$$

und $\psi_0' \equiv \frac{d}{dx} \psi_0$.

- b) (10 p.) Betrachte nun den Partner-Hamiltonian $H_+ = AA^+$, welcher auch als $H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+$ definiert werden kann. Zeige, dass für die Potentiale V_+ und V_- folgende Beziehung gilt:

$$V_+ = V_- - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)$$

- c) (15 p.) Zeige, dass H_- und H_+ , bis auf den Grundzustand, das gleiche Spektrum besitzen (*Tipp*: Betrachte die Zustände $A\psi_n^-$ und $A^+\psi_n^+$, wobei Ψ_n^\pm Eigenzustände von H_\pm sind). Stelle die Eigenzustände ψ_n^+ und Energien E_n^+ in Abhängigkeit von ψ_n^- und E_n^- dar.
- d) (15 p.) Betrachte nun ein Teilchen im unendlichen Kastenpotential

$$V_-(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

Bestimme V_0 , sodass der Grundzustand $E_0^- = 0$ besitzt. Berechne das Partnerpotential $V_+(x)$. Bestimme die korrekt normierten Eigenzustände $\psi_n^+(x)$. Erkläre warum das Auftreten von Partnerpotentialen nützlich sein könnte.