Übungsblatt 4
Theoretische Physik 3 : WS2020/2021
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

27.11.2020

Übung 1. Fourier Transformation. (10 points)

Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Gleichungen anhand der Definition in der Vorlesung

a) *(2 p.)* $f(x) = \delta(x)$ und $f(x) = \delta(x - x_0)$

b) *(2 p.)* $f(x) = a = \text{const}$

c) *(3 p.)* $f(x) = \cos(x)$

d) *(3 p.)* $f(x) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

Übung 2. doppeltes δ-Potential. (50 points)

Betrachten Sie das folgende eindimensionale Modellpotential für ein Molekül mit einem doppelt entarteten Zustand:

$$V(x) = -V_0 a \left(\delta(x - a) + \delta(x + a)\right),$$

wobei V_0 und a reele Parameter sind.

a) *(5 p.)* Wenden Sie eine Fouriertransformation auf die dazugehörige Schrödinger Gleichung an, $\hat{H}(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Zeigen Sie, dass dies im Impulsraum folgendermaßen aussieht

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(k) - \frac{V_0 a}{\sqrt{2\pi}}\left(\psi(a)e^{-ika} + \psi(-a)e^{ika}\right) = E\phi(k),$$

wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}\phi(k).$$

Tipp: Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x e^{ax} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ax}$

b) *(10 p.)* Unter Verwendung der erhaltenen Schröder-Gleichung im Impulsraum finden Sie die gebundenen Zustände des Systems im Koordinatenraum. Wie viele gebundene Zustände hat das System? *Tipp*: Die Lösung muss an den Punkten $x = \pm a$ konsistent sein.

c) *(10 p.)* Für $V_0 a = \frac{\hbar^2}{ma}$, finden Sie die Energien der stationären Zustände. Skizzieren Sie die entsprechenden Wellenfunktionen.
Tipp: Nutzen Sie die Tatsache, dass es gerade und ungerade Lösungen gibt.

d) *(10 p.)* Diskutieren Sie die Rolle des Parameters a für die stationären Zustände (betrachten Sie $a \to 0$ und $a \to \infty$).

e) *(15 p.)* Finden Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einen Strahl von Teilchen in diesem Potential.

Übung 3. Matrizen. (40 points)

Erinnern Sie sich, dass die Matrixmultiplikation eine nichtkommutative Operation ist. Wir definieren den Kommutator zweier Matrizen A und B als $[A, B] = AB - BA$.

a) *(10 p.)* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für beliebige Matrizen A, B und C:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],$$
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

b) *(10 p.)* Betrachte einen speziellen Fall, wenn $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.
Beweisen Sie durch Induktion, dass

$$[A, B^n] = [A, B]nB^{n-1}.$$

c) *(10 p.)* Wir definieren eine Funktion einer Matrixvariablen $f(A)$ durch die Maclaurin-Reihenentwicklung (vorausgesetzt, es ist möglich):

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

Im Fall $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ zeigen Sie, dass

$$[A, F(B)] = [A, B]F'(B),$$

Wobei F' die Funktion ist, die durch Differenzierung von F erhalten wird.

d) *(10 p.)* Betrachten Sie den gleichen Fall $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und beweise die Glauber-Formel

$$e^A \, e^B = e^{A+B} \, e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $F(t) = e^{tA} \, e^{tB}$. Zeigen Sie, dass es die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B])F(t)$ erfüllen muss. Dann lösen Sie die Gleichung, indem Sie feststellen, dass $(A + B)$ und $[A, B]$ pendeln und daher als bloße Zahlen behandelt werden können.