Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 12

1. [2, 2] Betrachten Sie die Leiteroperatoren für den Bahndrehimpuls,

$$\hat{l}_+ := \hat{l}_1 + i\hat{l}_2 \quad \text{und} \quad \hat{l}_- := \hat{l}_1 - i\hat{l}_2.$$

   a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{l}_3, \hat{l}_+]$ und $[\hat{l}_3, \hat{l}_-]$.

   b) Zeigen Sie, dass aus der Eigenwertgleichung $\hat{l}_z \,|m\rangle = \hbar m \,|m\rangle$ die Eigenwertgleichung $\hat{l}_3\hat{l}_\pm \,|m\rangle = \hbar(m \pm 1)\hat{l}_\pm \,|m\rangle$ folgt.

2. [12] Gegeben seien die Drehimpulseigenfunktionen Y_{lm} mit

$$\begin{aligned}
(\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + \hat{l}_3^2)Y_{lm}(\theta,\phi) &= \hbar^2\, l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi), \\
\hat{l}_3 Y_{lm}(\theta,\phi) &= \hbar\, m Y_{lm}(\theta,\phi), \\
\hat{l}_\pm Y_{lm}(\theta,\phi) &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, Y_{l,m\pm 1}(\theta,\phi),
\end{aligned}$$

   wobei $\hat{l}_\pm = \hat{l}_1 \pm i\hat{l}_2$ gilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren die Schwankungsquadrate $(\Delta l_i)^2 = \langle \hat{l}_i^2 \rangle - \langle \hat{l}_i \rangle^2$ für $i = 1, 2$ und 3 in einem Zustand Y_{lm}.

   Hinweis: Machen Sie von der Bra-Ket-Notation Gebrauch. Beispiel:

$$\langle l, m|\hat{l}_3|l, m\rangle = \hbar m \langle l, m|l, m\rangle = \hbar m.$$

   Alternativ:

$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}^*(\theta,\phi)\hat{l}_3 Y_{lm}(\theta,\phi) = \hbar m \int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}^*(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \hbar m.$$

3. [9] Die Eigenzustände zu $l = 2$ und $m = 2, 1, 0, -1, -2$ seien durch

$$|2,2\rangle := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |2,1\rangle := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad |2,-2\rangle := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

   dargestellt. Wie lauten die zugehörigen Matrizen zur Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{l}_1$, $\hat{l}_2$ und $\hat{l}_3$?

4. [8, 6, 3] Die beiden Zustände $|\uparrow\rangle := |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ und $|\downarrow\rangle := |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ („Spin up“ und „Spin down“) seien orthonormierte Eigenzustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems:

$$\langle\uparrow \mid \uparrow\rangle = \langle\downarrow \mid \downarrow\rangle = 1, \quad \langle\uparrow \mid \downarrow\rangle = \langle\downarrow \mid \uparrow\rangle = 0.$$

a) Verifizieren Sie

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad \text{und} \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1 &= \frac{\hbar}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\Big),\\
\hat{S}_2 &= \frac{i\hbar}{2}\Big(-|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\Big),\\
\hat{S}_3 &= \frac{\hbar}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\Big).
\end{aligned}$$

b) Die Eigenzustände seien durch

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

dargestellt. Wie lauten die zugehörigen Matrizen zur Darstellung von $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ und $\hat{S}_3$?

c) Es sei

$$(\Delta S_i)^2 = \langle\hat{S}_i^2\rangle - \langle\hat{S}_i\rangle^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Berechnen Sie $(\Delta S_1)^2$ und $(\Delta S_3)^2$ für den Zustand $|\uparrow\rangle$.