Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 11

1. [3, 3, 1] Es sei $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + V(\hat{\vec{x}})$. Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}_j = \frac{\hat{p}_j}{m} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}_j = -\nabla_j V(\hat{\vec{x}}).$$

Was wird in der Literatur unter den Ehrenfest'schen Sätzen verstanden?

2. [6, 1, 2] Gegeben sei der Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + V(\hat{\vec{x}})$.
   a) Bestimmen Sie die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für die Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{\vec{l}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$.
   b) Vergleichen Sie das Resultat mit dem klassischen Ausdruck.
   c) Diskutieren Sie den Fall eines Zentralpotenzials $V(\vec{x}) = U(r)$, wobei vereinfachend $r = |\vec{x}|$.

3. [5, 1, 4, 8] Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotenzial der Breite $a > 0$ mit unendlich hohen Wänden:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ \infty & \text{für } x > a. \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen der Masse m durch

$$\varphi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

   gegeben sind.

   Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $E > 0$, $E = 0$ und $E < 0$. Wegen des unendlich hohen Potenzials gelten die Stetigkeitsbedingungen $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ (die erste Ableitung ist unstetig).

   b) Wie lauten die Energieeigenwerte?
   c) Normieren Sie die Eigenfunktionen auf eins. Zeigen Sie explizit, dass die Eigenfunktionen ein orthogonales Funktionensystem bilden.
   d) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich ein Teilchen im Zustand

$$\Psi(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right),$$

wobei φ_1 und φ_2 die beiden niedrigsten Eigenzustände zum obigen Potenzial sind. Berechnen Sie für Zeiten $t > 0$ die Wellenfunktion $\Psi(t, x)$ und den Erwartungswert des Ortsoperators $\hat{x}$ als Funktion von t.

4. [6] Gegeben sei ein normierter Zustand $|\Psi\rangle$ mit den Eigenschaften $\langle\hat{x}\rangle = \langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle = 0$ und $\langle\hat{p}\rangle = \langle\Psi|\hat{p}|\Psi\rangle = 0$.

   Leiten Sie mit der Definition

   $$|\Psi(\lambda)\rangle := \lambda\hat{x}\,|\Psi\rangle + \tfrac{i}{\hbar}\hat{p}\,|\Psi\rangle\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

   aus der Ungleichung $I(\lambda) := \langle\Psi(\lambda)|\Psi(\lambda)\rangle \geq 0$ die Unschärferelation

   $$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \tfrac{1}{4}\hbar^2$$

   ab.

   Hinweis: Finden Sie den Wert λ_{min}, der das Integral minimiert.