Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 10

1. [3, 3, 7] Für die Komponenten des Impuls- und des Ortsoperators gilt

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \tfrac{\hbar}{i}\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0,$$

die Komponenten des Drehimpulsoperators lauten $\hat{l}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$.

Zeigen Sie:

a) $[\hat{x}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{x}_k$,

b) $[\hat{p}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k$,

c) $[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{l}_k$.

2. [2, 1] Betrachten Sie ein Teilchen in einer Dimension. Gegeben sei als klassische Observable der Ausdruck xp^2. Als Ansatz für den zugehörigen linearen Operator wählen Sie

$$\mathcal{L} = \alpha_1\hat{x}\hat{p}^2 + \alpha_2\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \alpha_3\hat{p}^2\hat{x} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Welche Bedingungen ergeben sich für die Koeffizienten aus den Forderungen:

a) $\mathcal{L}$ ist hermitesch.

b) $\mathcal{L}$ ergibt nach der Ersetzung $(\hat{x}, \hat{p}) \to (x, p)$ den Ausdruck für die klassische Observable.

Bemerkung: Dieses Beispiel illustriert, dass bei der „Übersetzung“ von der klassischen zur quantenmechanischen Ebene eine Mehrdeutigkeit auftreten kann.

3. [5] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ für eine Wellenfunktion

$$\Psi(t, \vec{x}) = |\Psi(t, \vec{x})|e^{i\alpha(t,\vec{x})}.$$

Zeigen Sie, dass diese Dichte für eine ortsunabhängige Funktion $\alpha(t)$ verschwindet.

4. [1, 2, 4] Gegeben sei eine eindimensionale Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ mit

$$\Psi(0, x) = Ae^{ikx}e^{-\alpha|x|}, \quad \text{wobei} \quad 0 \neq A \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha > 0.$$

a) Berechnen Sie die Dichte $\rho(0, x)$.

b) Bestimmen Sie A dergestalt, dass der Zustand auf eins normiert ist.

c) Berechnen Sie die Stromdichte $j(0, x)$.

5. [4, 8] Gegeben seien die Dichte- und Stromdichteoperatoren

$$\hat{\rho}(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \hat{\vec{x}}) \quad \text{und} \quad \hat{\vec{j}}(\vec{x}) = \frac{1}{2m}\left\{\hat{\vec{p}}, \hat{\rho}(\vec{x})\right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\langle\Psi(t)|\hat{\rho}(\vec{x})|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t, \vec{x})|^2$.

b) $\langle\Psi(t)|\hat{\vec{j}}(\vec{x})|\Psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*(t, \vec{x})\,\vec{\nabla}\Psi(t, \vec{x}) - \vec{\nabla}\Psi^*(t, \vec{x})\,\Psi(t, \vec{x})\right]$.

---

6. [3, 5, 5] Gegeben sei das freie Wellenpaket

$$\Psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k\ \widetilde{\Psi}_N(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \quad \text{mit} \quad \omega = \omega(\vec{k}) = \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}$$

sowie normierter Verteilung $\widetilde{\Psi}_N(\vec{k})$ (also $\int \mathrm{d}^3k\ \widetilde{\Psi}_N^*(\vec{k})\widetilde{\Psi}_N(\vec{k}) = 1$).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(t, \vec{x})$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*(t, \vec{x})\vec{\nabla}\Psi(t, \vec{x}) - \vec{\nabla}\Psi^*(t, \vec{x})\Psi(t, \vec{x})\right].$$

c) Verifizieren Sie explizit die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$