	1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 17. Januar 2020

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 9

1. **[5]** Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{-1}^{3}\left(\int_{2}^{4}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\mathrm{d}x\int_{2}^{4}\mathrm{d}y\,(x^2-y^2).$$

   Beim zweiten Ausdruck handelt es sich um die Physiker-Schreibweise.

2. **[5]** Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\, x^m y^n,$$

   wobei m und n aus der Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null sind.

3. **[7]** Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\, x\cos(xy).$$

   Bemerkung: Die Integrationsreihenfolge $\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b \mathrm{d}x\, x\cos(xy)$ ergibt dasselbe Ergebnis, ist allerdings deutlich aufwendiger.

4. **[7]** Es sei G das Rechteck mit den Eckpunkten $(2,1)$, $(3,1)$, $(2,4)$ und $(3,4)$. Skizzieren Sie das Integrationsgebiet und berechnen Sie

$$\int_G \mathrm{d}^2x\,(x+y)^2.$$

5. Es sei $I := [0,1]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^{(2)}$ und $f: I\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y)\in]0,1]\times]0,1],\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

   (a) **[2]** Betrachten Sie $x=0$ und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(0,y)\,\mathrm{d}y$.
   Hinweis: Schauen Sie sich die Definition der Funktion sorgfältig an.

   (b) **[2]** Bestimmen Sie für $0<x\le 1$ das Integral $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.
   Tipp:

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

(c) **[2]** Bestimmen Sie nun

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tipp:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x).$$

(d) **[1]** Betrachten Sie nun $y = 0$ und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x$.

(e) **[1]** Bestimmen Sie für $0 < y \leq 1$ das Integral $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$.
Tipp:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(f) **[1]** Bestimmen Sie nun

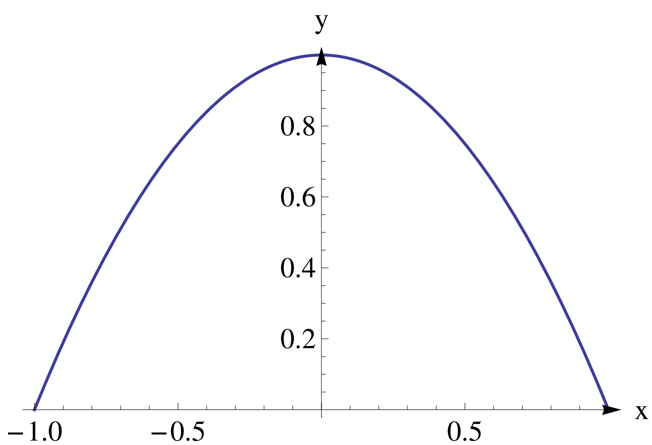
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Fazit: Die unterschiedliche Integrationsreihenfolge liefert unterschiedliche Ergebnisse. Die Funktion ist somit nicht Riemann-integrierbar.

6. **[7]** Berechnen Sie

$$\int_G \mathrm{d}^2x\, y = \int_G y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei G, wie in der Skizze gezeigt, das Flächenstück zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der x-Achse ist.



Tipp: Wählen Sie als begrenzende Kurven $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = 1 - x^2$.