1	2	3	4	$\sum$

Name:

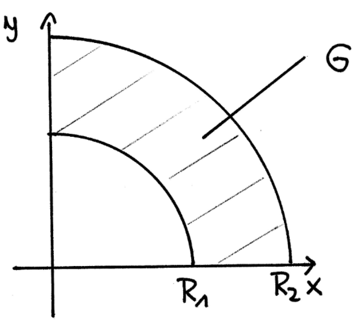
Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 24. Januar 2020

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2020
Übung 10

1. Es sei G der in der Skizze dargestellte Viertelkreisring einschließlich der Ränder:



   (a) **[2]** Drücken Sie G in Polarkoordinaten aus.

   (b) **[5]** Berechnen Sie
$$\int_G \mathrm{d}^2x\, xy.$$

2. **[4]** Berechnen Sie
$$\int_{x^2+y^2\leq R^2} \mathrm{d}^2x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
   Hinweis: Verwenden Sie geeignete Koordinaten.

3. **[4]** Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Radius R und Höhe h durch eine Integration vom Typ
$$\int_{\text{Zylinder}} \mathrm{d}^3x$$
   mithilfe der Zylinderkoordinaten.

4. Gegeben sei ein Zylinder mit
$$G = \{(\rho,\varphi,z)|0\leq\rho\leq R, 0\leq\varphi<2\pi, -\frac{h}{2}\leq z\leq\frac{h}{2}\}.$$
   Der Zylinder besitze eine homogene Massenverteilung
$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases}\rho_0 & \text{für } \vec{x}\in G,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$
   Beachten Sie, dass der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems sich im Schwerpunkt des Zylinders befindet und nicht etwa im Mittelpunkt des unteren Zylinderdeckels.

(a) **[2]** Drücken Sie ρ_0 durch R, h und die Gesamtmasse M aus.

Tipp: Siehe Aufgabe 3.

(b) **[6]** Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{33},

$$I_{33} = \int_G \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})(x^2 + y^2).$$

(c) **[8]** Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{11},

$$I_{11} = \int_G \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})(y^2 + z^2).$$

Hinweis: $\int \mathrm{d}x\, \sin^2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

(d) **[5]** Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{13},

$$I_{13} = -\int_G \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})xz.$$

(e) **[4]** Der Zylinder rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um eine Achse durch den Schwerpunkt. Drücken Sie die kinetische Energie der Rotation durch Ω_1, Ω_2 und Ω_3 sowie die Gesamtmasse M, den Radius R und die Höhe h des Zylinders aus.

Hinweis: Wegen der Zylindersymmetrie ist $I_{22} = I_{11}$. Außerdem verschwinden I_{12}, I_{23}.