Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 8

1. $[6, 6, 6, 8, 4]$ Gegeben sei ein freies, eindimensionales, zeitabhängiges Wellenpaket

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \widehat{\Psi}(k) \mathrm{e}^{i[kx - \omega(k)t]}, \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

mit $\widehat{\Psi}(k) := \widehat{\Psi}_0 \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}\right]$, $\widehat{\Psi}_0 \in \mathbb{C}$, $k_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

a) Bestimmen Sie $\widehat{\Psi}_0$ so, dass die Wellenfunktion die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\Psi(t,x)|^2 = 1$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass der Mittelwert der Wellenzahl, $\langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k |\widehat{\Psi}(k)|^2$, durch k_0 gegeben ist.

c) Die mittlere quadratische Abweichung $(\Delta k)^2$ der Wellenzahl lautet

$$\begin{aligned}(\Delta k)^2 &:= \left\langle (k - \langle k \rangle)^2 \right\rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k^2 |\widehat{\Psi}(k)|^2 - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k |\widehat{\Psi}(k)|^2 \right)^2 .\end{aligned}$$

Die Streuung Δk ist die Quadratwurzel dieser mittleren quadratischen Abweichung. Berechnen Sie Δk.

d) Es sei $\langle x \rangle (t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x |\Psi(t,x)|^2$ und $\langle x^2 \rangle (t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^2 |\Psi(t,x)|^2$. Berechnen Sie für $t = 0$ die Streuung $\Delta x(0) = \sqrt{\langle x^2 \rangle (0) - \left(\langle x \rangle (0) \right)^2}$.

e) Verifizieren Sie für $t = 0$: $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$.

Bemerkung: Die Gauß-Verteilung „minimiert“ die Unschärferelation.

Hinweise:

- Es sei a eine positive reelle Zahl oder eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Re}(a) > 0$, b und c seien zwei beliebige komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-(ax^2+2bx+c)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - ac}{a} \right).$$

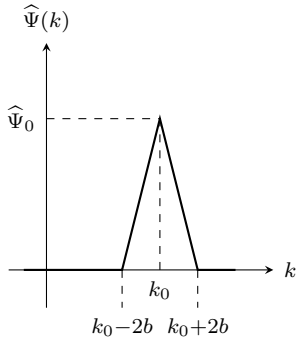
Inbesondere gilt für reelles $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

- Für reelles $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2} = (-)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; \mathrm{e}^{-ax^2}.$$

2. [5, 5] Gegeben sei eine Dreiecksverteilung mit $\widehat{\Psi}_0 > 0$, $k_0 \geq 0$ und $b > 0$.



a) Geben Sie die analytische Form von $\widehat{\Psi}(k)$ an.

b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\widehat{\Psi}_0$ so, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\; |\widehat{\Psi}(k)|^2 = 1$$

gilt.

---

3. [5] Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2}$ für reelles $a > 0$.

Hinweis:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{-a(x^2+y^2)}.$$

Berechnen Sie das Integral in ebenen Polarkoordinaten und ziehen Sie die Wurzel.