	1	2	3	4	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 10. Januar 2020

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 8

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

   (a) **[1]** Bestimmen Sie mithilfe von Wolfram|Alpha das bestimmte Integral

   $$\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

   (b) **[3]** Berechnen Sie die Taylor-Reihe von e^{-x^2} bis einschließlich Terme der Ordnung x^{10}. Wir bezeichnen die einzelnen Taylor-Polynome mit p_0, p_2, p_4, p_6, p_8 und p_{10}. Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Reihe für e^x und ersetzen Sie x durch $-x^2$.

   (c) **[4]** Bestimmen Sie nun das Integral approximativ, indem Sie die einzelnen Taylor-Polynome von 0 bis 1 integrieren. Ihre sechs Ergebnisse sollten sich Schritt für Schritt an das Resultat aus (a) annähern.

2. **[4]** Es seien $g(x)$ und $u(x)$ auf dem Intervall $[-a, a]$, $a > 0$, integrierbare Funktionen mit $g(x) = g(-x)$ und $u(x) = -u(-x)$. Zeigen Sie mithilfe einer Substitution

   $$\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x,$$
   $$\int_{-a}^{a} u(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

   Bemerkung: Insbesondere das zweite Ergebnis ist von großem Interesse, weil man sich damit unter Umständen sehr viel Rechenarbeit ersparen kann.

3. Partialbruchzerlegung. Gesucht ist das unbestimmte Integral

   $$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (a) **[3]** Schreiben Sie $\frac{1}{1-x^2}$ als Produkt $\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}$ von Brüchen $\frac{1}{N_1}$ und $\frac{1}{N_2}$. Machen Sie den Ansatz

   $$\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2} = \frac{A}{N_1} + \frac{B}{N_2},$$

   und bestimmen Sie A und B durch einen Koeffizientenvergleich.

   (b) **[4]** Berechnen Sie die beiden Integrale jeweils mithilfe einer Substitution.

(c) **[2]** Führen Sie die beiden Resultate in einem Ausdruck zusammen.
Als Endergebnis sollten Sie

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1+x|}{|1-x|}\right)$$

erhalten, wobei die Integrationskonstante C unterdrückt wurde.

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten und bestimmten Integrale. Wenden Sie die Substitutionsregel, partielle Integration oder gegebenenfalls andere Integrationsregeln an.

   (a) **[2]**

   $$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x$$

   (b) **[2]**

   $$\int_0^t e^{-\frac{2x}{a}}\,\mathrm{d}x$$

   (c) **[5]**

   $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

   Hinweis: Wenden Sie eine Substitution $x = \sin(y)$ an. Machen Sie anschließend von partieller Integration Gebrauch. Nutzen Sie nun $\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$.

   (d) **[1]**

   $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

   (e) **[2]**

   $$\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

   (f) **[2]**

   $$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \ a > 0$$

   (g) **[1]**

   $$\int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

   (h) **[2]**

   $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

   (i) **[2]** Benutzen Sie

   $$\ln(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

   zusammen mit der Substitution $x = \frac{y}{a}$, um die Gültigkeit der Rechenregel

   $$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),\ \ a, b > 0,$$

   zu zeigen.