Name:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 20. Dezember 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 7

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$ aus Übung 5, Aufgabe 2 (d).
   (a) **[3]** Bestimmen Sie die Extremwertstellen, an denen die Funktion ein Minimum hat.
   (b) **[5]** Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion um die Stelle $x_0 = 1$.

2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

   die in der Physik häufig mit dem Namen r anstelle von f bezeichnet wird.
   (a) **[3]** Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$.
   (b) **[2]** Geben Sie (ohne neue Rechnung) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ an (Begründung!).
   (c) **[2]** Wir betrachten eine weitere Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ und definieren das Kompositum $h = g \circ r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $h(x,y,z) = g(r(x,y,z))$. Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial x}$. Die beiden anderen partiellen Ableitungen ergeben sich analog.

3. **[6]** Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x\sin(y) - y\sin(x)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y).$$

   Bemerkung: Da die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist, spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keine Rolle.

4. **[3]** Benutzen Sie

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z,$$

um näherungsweise zu berechnen, wie sich der Wert der Funktion $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ beim Übergang von der Stelle $(2, 1, 1)$ zur Stelle $(2{,}003, 1{,}001, 1{,}005)$ ändert.

5. Die potenzielle Energie eines Teilchens, das sich am Ort (x, y, z) befindet, sei durch

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

gegeben.

   (a) **[3]** Nun bewege sich das Teilchen: Zur Zeit t sei es am Ort $(x(t), y(t), z(t))$. Drücken Sie die zeitliche Änderungsrate der potenziellen Energie dieses Teilchens durch den Ort $\vec{r}(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ zur Zeit t aus.

   (b) **[1]** Wie muss sich das Teilchen bewegen, damit $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$ ist.

6. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = e^x \cos(xy)$.

   (a) **[6]** Berechnen Sie *explizit* die Taylor-Entwicklung um die Stelle $(x^0, y^0) = (0, 0)$ bis einschließlich Terme der Ordnung x^2, xy und y^2.

   (b) **[3]** Berechnen Sie nun die Taylor-Entwicklung bis einschließlich x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, indem Sie von der Entwicklung der Exponentialfunktion und der Kosinusfunktion Gebrauch machen.

7. **[3]** Es sei $f(t, x, y) = t(x^2 + y^2)$. Bestimmen Sie für $x(t) = a\cos(\omega t)$ und $y(t) = b\sin(\omega t)$ die totale zeitliche Änderung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.