Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 7

1. [5] Es sei $\vec{A}(t,\vec{x})$ ein zeitabhängiges, transversales Vektorfeld, d.h. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{x})=0$. Betrachten Sie die Fourier-Darstellung

$$A_j(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \tilde{A}_j(t,\vec{k})\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad j=1,2,3.$$

   Welche Bedingung folgt für die $\tilde{A}_j(t,\vec{k})$ aus der Transversalität des Vektorfelds?

2. [5] Die kontravarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe seien symbolisch durch das Schema

$$(T^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} a_{1\times1} & b_{1\times3} \\ \hline c_{3\times1} & d_{3\times3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right)$$

   gegeben. Wie lauten die entsprechenden Schemata für $(T^{\mu}{}_{\nu})$, $(T_{\mu}{}^{\nu})$ und $(T_{\mu\nu})$, wie sieht $(F_{\mu\nu}(x))$ aus?

3. [7] Gegeben seien sowohl die Viererstromdichte $(J^\mu(x)) := (c\rho(t,\vec{x}), \vec{J}(t,\vec{x}))$ als auch das elektromagnetische Viererpotenzial $(A^\mu(x)) := (\Phi(t,\vec{x}), \vec{A}(t,\vec{x}))$ sowie der Feldstärketensor

$$(F^{\mu\nu}(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x(t,\vec{x}) & -E_y(t,\vec{x}) & -E_z(t,\vec{x}) \\ E_x(t,\vec{x}) & 0 & -B_z(t,\vec{x}) & B_y(t,\vec{x}) \\ E_y(t,\vec{x}) & B_z(t,\vec{x}) & 0 & -B_x(t,\vec{x}) \\ E_z(t,\vec{x}) & -B_y(t,\vec{x}) & B_x(t,\vec{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie explizit, dass $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$ den inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

   entspricht.

4. [7] Gegeben seien die kontravarianten Komponenten des dualen Feldstärketensors $\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ mit $\epsilon_{0123}=1$, oder in Matrixschreibweise

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie explizit, dass $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

   entspricht.

5. [7] Das Koordinatensystem K' sei durch $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ mit K verknüpft, wobei

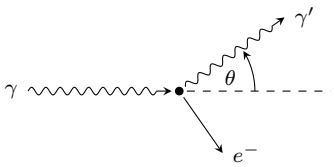
$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad -1 < \beta < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

In K seien darüber hinaus das konstante elektrische bzw. magnetische Feld

$$\vec{E} = -E_0 \hat{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{B} = B_0 \hat{e}_z$$

gegeben.
Bestimmen Sie die elektrischen bzw. magnetischen Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ in K'.

6. [6, 3] Wir betrachten die Streuung von Röntgen-Strahlen an einem Elektron:



a) Zeigen Sie mit Hilfe der Energie- und Impulserhaltung im Laborsystem,

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{(m_e c^2)^2 + \vec{p}\,'^2 c^2} \quad \text{und} \quad \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}\,' + \vec{p}\,',$$

dass die Frequenz des gestreuten Photons gegeben ist durch

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}(1 - \cos(\theta))} \leq \omega.$$

b) Zeigen Sie, dass die Streuung zu einer Vergrößerung der Wellenlänge gemäß

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

führt.

---

7. [5] Gegeben sei die inhomogene Wellengleichung

$$\Delta\Psi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(t,\vec{x})}{\partial t^2} = -4\pi F(t,\vec{x}).$$

Für die Green'schen Funktionen $G^{(\pm)}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,')$ gilt

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{(\pm)}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\delta(t-t').$$

Zeigen Sie, dass

$$\Psi^{(\pm)}(t,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3x'\, G^{(\pm)}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') F(t',\vec{x}\,')$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist.