Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 6

1. [4, 4] Gegeben seien die Potenziale

$$\Phi(t,\vec{x}) = a\omega \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}, \quad \vec{A}(t,\vec{x}) = ac\vec{k}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

mit $\omega = c|\vec{k}|$ und $a =$ konst.

a) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$.

b) Zeigen Sie, dass die Potenziale durch Wahl einer geeigneten Eichung zum Verschwinden gebracht werden können. Wie lautet diese Eichfunktion?

2. [2, 2, 3, 4] Gegeben seien die Potenziale

$$\Phi(t,\vec{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{A}(t,\vec{x}) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\hat{e}_y$$

mit $\vec{k} = k\hat{e}_x$, $\omega = c|\vec{k}|$ und $A_0 =$ konst.

a) Zeigen Sie, dass die Potenziale die Lorenz-Bedingung erfüllen.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad \text{und} \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

die zugehörigen Ladungs- und Stromdichten.

c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$.

d) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ die vier Maxwell-Gleichungen für verschwindende Ladungs- und Stromdichten erfüllen.

3. [4] Gegeben seien die Maxwell-Gleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{J} = \vec{0}$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Leiten Sie die Wellengleichung für $\vec{B}$ her.

4. [3, 3, 5, 6] Gegeben sei das elektrische Feld einer in z-Richtung laufenden, monochromatischen Welle in komplexer Schreibweise,

$$\vec{E}_c(t,\vec{x}) = \Big(|c_1|\hat{e}_x + |c_2|\mathrm{e}^{i\varphi}\hat{e}_y\Big)\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}, \quad k = {}^{\omega}/_{c} > 0.$$

Das physikalische elektrische Feld ist definiert durch $\vec{E}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\Big(\vec{E}_c(t,\vec{x})\Big)$.

a) Berechnen Sie zunächst das zugehörige komplexe magnetische Feld $\vec{B}_c(t,\vec{x})$ und anschließend das physikalische magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\Big(\vec{B}_c(t,\vec{x})\Big)$.

b) Berechnen Sie nun den Poynting-Vektor

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x})$$

mit Hilfe der physikalischen Felder.

c) Überprüfen Sie

$$\frac{c}{4\pi}\vec{E}_c(t,\vec{x}) \times \vec{B}_c(t,\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left[|c_1|^2 e^{2i(kz-\omega t)} + |c_2|^2 e^{2i(kz-\omega t+\varphi)}\right]\hat{e}_z.$$

Bestimmen Sie nun den Realteil dieses Ausdrucks. Stimmt das Ergebnis mit $\vec{S}$ aus b) überein?

Hinweis: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

d) Es sei $T = 2\pi/\omega$. Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors für $z = 0$,

$$\Big\langle \vec{S}(x,y,0)\Big\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\; \vec{S}(t,x,y,0).$$

---

5. [6] Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in den elektromagnetischen Potenzialen Φ und $\vec{A}$,

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^{\,2} - q\Phi(t,\vec{x}) + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(t,\vec{x}),$$

mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Lorentz-Kraft $\vec{F}_{\mathrm{L}}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ her.

Hinweise:

a) Die Euler-Lagrange-Gleichung für die Komponente x_i lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

b) Drücken Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch geeignete partielle Ableitungen der Potenziale Φ und $\vec{A}$ aus.

c) Verwenden Sie $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, um die i-te Komponente $(\dot{\vec{x}}\times\vec{B})_i$ geeignet umzuschreiben.