Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 5

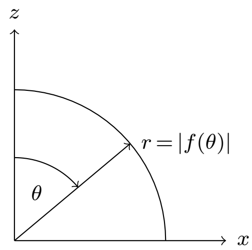
1. [9] Die Legendre-Polynome $P_l(x)$ vom Grad $l \in \mathbb{N}_0$ bilden ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$. Es gilt

$$\langle P_l, P_{l'} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

mit der Normierung $P_l(1) = 1$ für alle l. Konstruieren Sie allein mithilfe dieser beiden Eigenschaften durch Rekursion die ersten drei Polynome P_0, P_1 und P_2.

2. [9] Skizzieren Sie jeweils einen Monopol, Dipol und Quadrupol anhand einer Zeigerdarstellung der Funktionen Y_{00}, Y_{10}, Y_{20} und Y_{21} in der (x, z)-Ebene.

Zeichnen Sie hierzu eine Kurve als Funktion von θ, deren Abstand vom Ursprung durch den Betrag des Funktionswertes gegeben ist. Tragen Sie darüber hinaus das Vorzeichen der Funktion in die entsprechenden Flächen ein.



Hinweis: Positive und negative Werte von x entsprechen $\phi = 0$ und $\phi = \pi$.

3. [2, 4] Gegeben seien die statischen Vektorpotenziale

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = -B_0 y \hat{e}_x \quad \text{und} \quad \vec{A}_2(\vec{x}) = a x^2 \hat{e}_x + B_0 x \hat{e}_y$$

mit nichtverschwindenden reellen Konstanten a und B_0.

   a) Bestimmen Sie jeweils das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}$.

   b) Überprüfen Sie, ob diese $\vec{A}_i$ die Coulomb-Eichbedingung erfüllen. Sollte das nicht der Fall sein, so finden Sie eine geeignete Eichfunktion $\chi(\vec{x})$.

4. [8] Gegeben sei das Vektorpotenzial eines magnetischen Dipols im Ursprung,

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}\,) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{r^3}.$$

Verifizieren Sie, dass das Magnetfeld für $r \neq 0$ durch

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{Dipol}} = \frac{3\vec{x}\vec{x} \cdot \vec{\mu} - \vec{\mu} r^2}{r^5}$$

gegeben ist.

5. [8] In einer kreisförmigen Leiterschleife in der (x, y)-Ebene (Mittelpunkt im Ursprung, Radius R) fließt ein konstanter Strom I. Berechnen Sie das zugehörige magnetische Dipolmoment. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

---

6. $[3, 1, 1, 2]$ Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \, g(x, y)$$

mit

$$g(x, y) := a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2.$$

a) Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$ durch Integration über y.

b) Differenzieren Sie nun $f(x)$.

c) Bilden Sie die erste partielle Ableitung von g bzgl. x.

d) Integrieren Sie das Resultat aus c) über y von y_1 bis y_2. Vergleichen Sie mit b), welchen Schluss ziehen Sie?