Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 4

1. [3, 2, 3] Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$P'' + \cot(\theta)P' + \left(\beta - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)P = 0 \quad \text{mit } P = P(\theta) \text{ für } 0 < \theta < \pi.$$

Substitution von $x = \cos(\theta)$, $0 < \theta < \pi$ (bzw. $\theta = \arccos(x)$, $-1 < x < 1$) liefert

$$P(\theta) = P\Big(\arccos(x)\Big) =: y(x),$$
$$y'(x) = P'(\theta)\arccos'(x) = -P'(\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad P'(\theta) = -\sqrt{1-x^2}\,y'(x).$$

a) Bestimmen Sie analog $y''(x)$ und verifizieren Sie $P''(\theta) = (1-x^2)y''(x) - xy'(x)$.

b) Drücken Sie $\cot(\theta)$ und $\sin^2(\theta)$ als Funktionen von $x$ aus.

c) Setzen Sie die Resultate in obige Gleichung ein und leiten Sie die allgemeine Legendre-DGL her:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\beta - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0.$$

2. [7] Lösen Sie mithilfe von

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos(\theta))$$

die Laplace-Gleichung bei vorgegebener Randbedingung $\Phi(R,\theta) = \Phi_0\sin^2(\theta)$. Unterscheiden Sie zwischen den Gebieten $r < R$ und $r > R$.

*Hinweis:* Im Unendlichen muss das Potenzial verschwinden. Im Ursprung darf es nicht singulär sein.

3. [3, 3] Gegeben seien die Kugelfunktionen (mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$)

$$Y_{lm}(\theta,\phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos(\theta))e^{\mathrm{i}m\phi}$$

mit den zugeordneten Legendre-Funktionen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l.$$

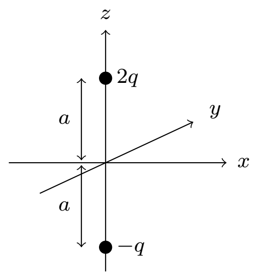
a) Zeigen Sie: $Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi)$.

b) Eine Paritätstransformation $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$ impliziert für die Kugelkoordinaten $r \mapsto r$, $\theta \mapsto \pi - \theta$ und $\phi \mapsto \phi \pm \pi$. Zeigen Sie: $Y_{lm}(\pi - \theta, \phi \pm \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$.

4. [4] Drücken Sie $rY_{1m}$ $(m = -1, 0, 1)$ durch $x$, $y$ und $z$ aus. Drücken Sie nun $x$, $y$ und $z$ als Linearkombination von $rY_{1m}$ $(m = -1, 0, 1)$ aus.

5. [3] Gegeben sei die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}\,) = \frac{2q}{2\pi r^2}\delta(r-a)\delta(\cos(\theta)-1) - \frac{q}{2\pi r^2}\delta(r-a)\delta(\cos(\theta)+1).$$




Bei azimutaler Symmetrie lautet die Definition für die Multipolmomente

$$q_l := \int \mathrm{d}^3x \; P_l(\cos(\theta)) r^l \rho(\vec{x}\,).$$

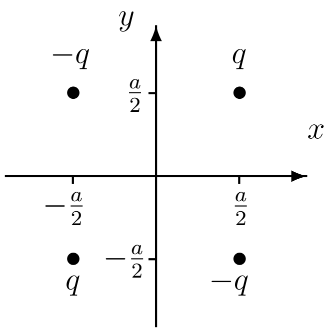
Zeigen Sie: Für die $q_l$ der obigen Ladungsverteilung gilt

$$q_l = qa^l[2-(-1)^l].$$

*Hinweise:*

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) f(\cos(\theta)) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x f(x), \quad P_l(1) = 1, \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x).$$

6. [2, 1, 2, 6, 1] Gegeben sei die Ladungsverteilung eines Quadrupols in der $(x, y)$-Ebene (die $z$-Achse zeigt aus der Zeichenebene heraus auf Sie zu),




   a) Drücken Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten mithilfe der Delta-Funktion aus.
   b) Wie groß ist die Gesamtladung?
   c) Bestimmen Sie das elektrische Dipolmoment $\vec{d} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x}\rho(\vec{x})$.
   d) Bestimmen Sie die Komponenten des Quadrupoltensors

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3x\,(3x_ix_j - r^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}), \quad r = |\vec{x}|.$$

   e) Zeigen Sie, dass das Potenzial sich für $r \to \infty$ wie

$$\Phi(\vec{x}) \overset{r\to\infty}{\to} 3qa^2\frac{xy}{r^5}$$

   verhält.