Name:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 13. Dezember 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 6

1. **[3]** Bestimmen Sie folgende Ableitungen:
   (a) $(x^2 e^x)'$
   (b) $(x^3 \cos(2x))'$
   (c) $(\cos(x)e^x)^{(2)}$

2. **[6]** Bestimmen Sie mithilfe der Quotientenregel die folgenden Ableitungen und geben Sie jeweils deren Definitionsbereiche an:

$$(\cot(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)',$$
$$(\tanh(x))' = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)',$$
$$(\coth(x))' = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right)'.$$

   Hinweis:

$$(\sinh(x))' = \cosh(x),$$
$$(\cosh(x))' = \sinh(x).$$

3. **[5]** Leiten Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen her:

$$f(x) = \sin(x^2),$$
$$f(x) = \sin^2(x),$$
$$f(x) = e^{-x},$$
$$f(x) = \exp(-x^2),$$
$$f(x) = \frac{1}{ax+b}.$$

4. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in der (x,y)-Ebene gleichförmig auf einer Ellipsenbahn mit Halbachsen a und b:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

(a) **[1]** Zeichnen Sie eine Skizze der Ellipse.

(b) **[2]** Bestimmen Sie $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$.

(c) **[1]** Wie muss die Kraft als Funktion von $\vec{r}$ aussehen, damit die Ellipsenbahn Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung, $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$, ist.

(d) **[4]** Bestimmen sie den Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$.

(e) **[1]** Bestimmen Sie die zeitliche Änderung des Drehimpulses.

5. Gegeben sei die Funktion $f :]-1, \infty[, \ x \mapsto f(x) = \ln(1+x)$.

   (a) **[1]** Skizzieren Sie die Funktion.

   (b) **[7]** Bestimmen Sie das zugehörige Taylor-Polynom der Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ bis einschließlich der Ordnung x^4.

   (c) **[1]** Geben Sie aufgrund der ersten Glieder eine geschlossene Formel für die gesamte Taylor-Reihe an.

   (d) **[2]** Bestimmen Sie das Ergebnis für $x = 0{,}2$ mithilfe eines Taschenrechners. Vergleichen Sie dann mit den Ergebnissen der Taylor-Polynome p_0, p_1, p_2, p_3 und p_4 für $x = 0{,}2$.

   Bemerkung: Die Taylor-Entwicklung von $\ln(1+x)$ um die Stelle 0 konvergiert für $-1 < x \leq 1$.

6. Wir betrachten die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines Teilchens mit Ruhemasse m und Betrag $p := |\vec{p}|$ des Impulsvektors $\vec{p}$:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

   Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Für die Betrachtung des nichtrelativistischen Grenzfalls, $p \ll mc$, ist es zweckmäßig einen Faktor mc^2 aus der Wurzel herauszuziehen:

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}.$$

   (a) **[4]** Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit Mittelpunkt 0 bis einschließlich der Potenz x^2:

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

   Hinweis:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

   (Bei ganzzahligem m und $n > m$ ist die n-te Ableitung gleich 0.)

   (b) **[2]** Verwenden Sie das Resultat aus (a), indem Sie $x = \frac{p^2}{(mc)^2}$ setzen, und verifizieren Sie

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^6}{(mc)^6}\right).$$

   Interpretation: Der erste Term stellt die Ruheenergie des Teilchens dar, der zweite Term die nichtrelativistische kinetische Energie und der dritte Term die erste relativistische Korrektur.