Name:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 6. Dezember 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 5

1. **[6]** Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen von der Menge der zweidimensionalen Vektoren in die Menge der zweidimensionalen Vektoren um lineare Abbildungen handelt (Begründung angeben!):

   (a) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

   (d) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (e) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

   (f) $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \sin(x_2) \end{pmatrix}$

2. **[4]** Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = x^2$, $x \in [-2, 2]$

   (b) $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [-1, 3]$

   (c) $f(x) = (x+1)^2$, $x \in [-3, 1]$

   (d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$, $x \in [-2, 2]$

3. **[11]** Geben Sie für die folgenden reellen Funktionen den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich an:

   (a) $f(x) = x$

   (b) $f(x) = x^2$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$

   (d) $f(x) = e^x$

   (e) $f(x) = e^{-x}$

   (f) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

   (g) $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

(h) $f(x) = \ln(x)$

(i) $f(x) = \sin(x)$

(j) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(k) $f(x) = \frac{1}{x}$

4. **[3]** Schreiben Sie die folgenden reellen Funktionen h als Komposita $f \circ g$ zweier Funktionen f und g. Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich von h an.

   (a) $h(x) = (2x+1)^2$

   (b) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (c) $h(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$

5. Gerade und ungerade Funktionen

   (a) **[7]** Es seien g, g_1 und g_2 gerade Funktionen und u, u_1 und u_2 ungerade Funktionen. Zeigen Sie, dass $g_1 + g_2$, $g_1 \cdot g_2$ und $u_1 \cdot u_2$ gerade Funktionen und $u_1 + u_2$ sowie $u \cdot g$ ungerade Funktionen sind. Zeigen Sie außerdem, dass das Kompositum einer beliebigen Funktion f und einer geraden Funktion g, $f \circ g$, eine gerade Funktion ergibt. Zeigen Sie schließlich, dass das Kompositum einer ungeraden Funktion u_1 und einer ungeraden Funktion u_2, $u_1 \circ u_2$, eine ungerade Funktion ergibt.

   (b) **[2]** Gegeben sei eine beliebige reelle Funktion f auf einem symmetrischen Intervall ($[-a, a]$, $]-a, a[$ oder $\mathbb{R}$.)
   Zeigen Sie, dass f_g und f_u, definiert durch

   $$f_g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big), \quad f_u(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big),$$

   gerade bzw. ungerade Funktionen sind. Man spricht auch vom geraden und ungeraden Anteil der Funktion f.

   (c) **[4]** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den geraden und den ungeraden Anteil:

   i. $f(x) = \cos(x)$

   ii. $f(x) = \sin(x)$

   iii. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

   iv. $f(x) = e^x$

6. **[3]** Gegeben seien die Hyperbelfunktionen

   $$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

   Zeigen Sie

   $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

   Tipp: $e^a e^b = e^{a+b}$, $e^0 = 1$.