	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Name:							

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer — Abgabe: 29. November 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 4

1. Gegeben seien zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B.

   (a) **[5]** Zeigen Sie $(AB)^T = B^T A^T$.
   Hinweis: Schreiben Sie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^T = (\alpha_{ij})$, $B^T = (\beta_{ij})$ und nutzen Sie $a_{ij} = \alpha_{ji}$ und $b_{ij} = \beta_{ji}$.

   (b) **[4]** Verifizieren Sie $(AB)^T = B^T A^T$ explizit für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. **[6]** Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Hierbei geht B durch Vertauschung der ersten und der zweiten Spalte aus A hervor und C durch Vertauschung der zweiten und der dritten Zeile.

   Berechnen Sie $\det(A)$. Verifizieren Sie durch *explizite Berechnung*, dass $\det(B) = \det(C) = -\det(A)$.

   Bemerkung: Ganz allgemein gilt, dass eine Determinante ihr Vorzeichen ändert, wenn man zwei Zeilen oder zwei Spalten miteinander vertauscht.

3. **[4]** Gegeben seien die (2×2)-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Überprüfen Sie den Determinantenmultiplikationssatz $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

4. Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) **[4]** Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte von A.

   (b) **[4]** Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor $\vec{u}_i$.

   (c) **[1]** Zeigen Sie, dass die von Ihnen bestimmten Eigenvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ orthogonal sind.

Bemerkung: Sie haben an einem expliziten Beispiel überprüft, dass eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix n reelle Eigenwerte besitzt, und dass die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal sind.

5. **[9]** Gegeben sei die Matrix einer Drehung in zwei Dimensionen:

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Zeigen Sie, dass $D(\varphi)$ für $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \pi$ keine reellen Eigenwerte besitzt. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$?

Interpretation: Für $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \pi$ gibt es außer dem Nullvektor bei einer Drehung im Zweidimensionalen keinen Vektor, der auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet wird.

6. **[3]** Formulieren Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise:

(a)

$$\begin{aligned} y_1 &= -3x_1 + x_2, \\ y_2 &= 12x_1 - 7x_2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y_1 &= -3x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= 12x_1 - 7x_2 - x_3. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y_1 &= -3x_1 + x_2, \\ y_2 &= 12x_1 - 7x_2, \\ y_3 &= -8x_1 + 4x_2. \end{aligned}$$