Name:

1	2	3	$\sum$

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 22. November 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 3

1. Gegeben seien die (2×2)-Matrix

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

und die Einheitsvektoren $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) **[3]** Berechnen Sie $D(\varphi)\hat{e}_1$ und $D(\varphi)\hat{e}_2$. Was macht $D(\varphi)$ mit den Einheitsvektoren $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2$?

(b) **[2]** Betrachten Sie nun die Matrix

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Berechnen Sie $C(\varphi)D(\varphi)$ und $D(\varphi)C(\varphi)$.
Fazit: $C(\varphi)$ ist die zu $D(\varphi)$ inverse Matrix und wird deshalb auch als $D^{-1}(\varphi)$ geschrieben.

2. Gegeben seien die Matrizen

$$D_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad D_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $0 \leq \varphi < 2\pi$. Diese beschreiben respektive Drehungen um die x-, y- und z-Achse mit dem Drehwinkel φ.

In den folgenden Rechnungen betrachten Sie jeweils exemplarisch einen Fall für ein $D_i(\varphi)$, die beiden anderen Fälle ergeben sich durch analoge Rechnungen.

(a) **[2]** Es sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $D_1(\varphi)\vec{x}$. Welche Komponente des Vektors bleibt unverändert?

(b) **[1]** Berechnen Sie die Spur $\mathrm{tr}(D_2(\varphi))$.

(c) **[2]** Berechnen Sie die Determinante $\det(D_2(\varphi))$.

(d) **[6]** Bestimmen Sie $(D_3(\varphi))^T$ und berechnen Sie $(D_3(\varphi))^T D_3(\varphi)$ und $D_3(\varphi)(D_3(\varphi))^T$. Um welche Matrix handelt es sich bei $(D_3(\varphi))^T$?

(e) **[5]** Berechnen Sie die Matrizenprodukte $D_3(\varphi_2)D_3(\varphi_1)$ und $D_3(\varphi_1)D_3(\varphi_2)$. Welchen Schluss ziehen Sie bezüglich der Vertauschbarkeit von Drehungen um *dieselbe Achse*?
Hinweis: $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$.
Bemerkung: Ist $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 2\pi$, so ersetzt man die Summe durch $\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$.

(f) **[5]** Berechnen Sie die Matrizenprodukte $D_2(\pi)D_3(\frac{\pi}{2})$ und $D_3(\frac{\pi}{2})D_2(\pi)$. Welchen Schluss ziehen Sie bezüglich der Vertauschbarkeit von Drehungen um *verschiedene Achsen*?

(g) **[3]** Wir betrachten eine Spiegelung an der (x, y)-Ebene, das heißt eine Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto S_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$. Die zugehörige Matrix S_{xy} lautet

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Matrizen S_{xz} und S_{yz} für Spiegelungen and der (x, z)-Ebene und der (y, z)-Ebene? Was ergibt sich für die Determinante von S_{xy}, S_{xz} und S_{yz}?

(h) **[3]** Bestimmen Sie das Produkt $S_{xz}S_{xy}$. Drücken Sie das Produkt durch eine geeignete Drehung (mit dem Drehwinkel π) aus.

(i) **[3]** Die Raumspiegelung P (auch Paritätstransformation genannt) führt zu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. Wie sieht die zugehörige Matrix aus? Drücken Sie P mithilfe von S_{xy}, S_{xz} und S_{yz} aus. Drücken Sie P mithilfe von S_{xy} und einer geeigneten Drehung mit Drehwinkel π aus.

Verallgemeinerung: Für (eigentliche) Drehungen um eine beliebige Achse $\hat{n}$ mit Drehwinkel φ gilt:

(a) $D_{\hat{n}}(\varphi)\hat{n} = \hat{n}$;

(b) $\mathrm{tr}(D_{\hat{n}}(\varphi)) = 1 + 2\cos(\varphi)$;

(c) $\det(D_{\hat{n}}(\varphi)) = 1$;

(d) $D_{\hat{n}}^{-1}(\varphi) = (D_{\hat{n}}(\varphi))^T$;

(e) das Produkt zweier Drehungen ist eine Drehung;

(f) beim Nacheinanderausführen von Drehungen um *dieselbe* Drehachse spielt die Reihenfolge keine Rolle;

(g) Drehungen um *verschiedene* Achsen vertauschen nicht miteinander.

Spiegelungen besitzen Determinante -1. Drehspiegelungen lassen sich als Produkt von Drehungen und Paritätstransformation schreiben.

3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7, \\ 3x_1 - 4x_2 &= -9. \end{aligned}$$

(a) **[1]** Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrizenform.

(b) **[1]** Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(c) **[3]** Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der inversen Matrix.