1	2	3	4	5	$\sum$

Name:

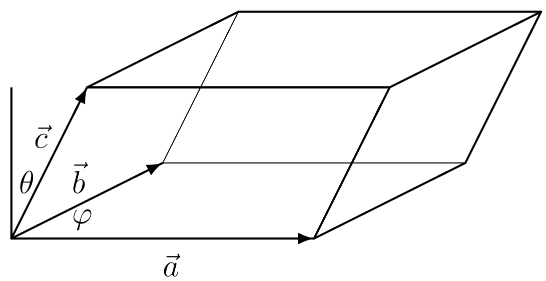
Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 15. November 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 2

1. [**3**] Gegeben sei ein durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannter Spat (Parallelepiped):



Begründen Sie, weshalb das Volumen durch

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

gegeben ist.

Hinweis: Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und der Grundfläche her. Überlegen Sie anschließend, was die Höhe des Spats ist. Wieso taucht das Betragszeichen auf?

2. Polarkoordinaten

(a) [**4**] Skizzieren Sie ein kartesisches (x, y)-Koordinatensystem. Tragen Sie die Punkte $P_1 = (1, 1)$ und $P_2 = (-1, 0)$ ein. Tragen Sie die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ein. Wie lauten die Polarkoordinaten (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) der Punkte?

(b) [**6**] Im Folgenden werden 9 Möglichkeiten für die kartesischen Koordinaten (x, y) eines Punktes P diskutiert. Ordnen Sie diesen Möglichkeiten jeweils den richtigen Wertebereich des Winkels φ zu, wobei wir als Konvention $0 \leq \varphi < 2\pi$ vereinbaren.

(1) $x > 0$, $y = 0$	i. $\varphi = \pi$
(2) $x < 0$, $y > 0$	ii. $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$
(3) $x = 0$, $y < 0$	iii. $\varphi = 0$
(4) $x > 0$, $y > 0$	iv. $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$
(5) $x = 0$, $y = 0$	v. $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
(6) $x = 0$, $y > 0$	vi. $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$
(7) $x > 0$, $y < 0$	vii. $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(8) $x < 0$, $y = 0$	viii. $\varphi = \frac{3}{2}\pi$
(9) $x < 0$, $y < 0$	ix. $\varphi = 0$

3. Gegeben seien die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten,

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &= \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y,\\ \hat{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y,\\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z.\end{aligned}$$

   (a) **[5]** Berechnen Sie <u>explizit</u> die Skalarprodukte $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi$, $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z$, $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi$, $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z$ und $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z$.
   Hinweise: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ jeweils die Länge 1 besitzen und paarweise auf einander senkrecht stehen.
   $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$.

   (b) **[6]** Berechnen Sie nun die Kreuzprodukte $\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z$ und $\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho$.
   Hinweis: $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ bildet ein rechtshändiges System.

   Fazit: Sie haben sich davon überzeugt, dass $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z\}$ ein rechtshändiges, normiertes, orthogonales Dreibein bildet.

4. **[5]** Berechnen Sie die Produkte

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Gegeben seien die (2×2)-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

   und der Spaltenvektor ((2×1)-Matrix)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{(häufig wird der Vektorpfeil weggelassen).}$$

   (a) **[3]** Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ (häufig werden die Punkte auch weggelassen, und man schreibt AB und BA). Welchen Schluss ziehen Sie bezüglich der Vertauschbarkeit der Reihenfolge in der Matrizenmultiplikation?

   (b) **[3]** Berechnen Sie $\vec{y} := A\vec{x}$ und anschließend $B\vec{y}$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis von $(BA)\vec{x}$.

   (c) **[2]** Überprüfen Sie das Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$.

   (d) **[3]** Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

   Welche Schlüsse ziehen Sie?