Hilfsformel

Es seien f und g stetig differenzierbare Funktionen, $\vec{v}$ ein lokalisiertes Vektorfeld mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.
Dann gilt

$$\int \mathrm{d}^3x \, \left(f\vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + g\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \right) = 0.$$

Begründung: Partielle Integration im zweiten Term liefert

$$\int \mathrm{d}^3x \, g\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \int \mathrm{d}^3x \, \vec{\nabla} \cdot (g\vec{v} f) - \int \mathrm{d}^3x \, \vec{\nabla} \cdot (g\vec{v}) f.$$

Hinweis: Mit Hilfe der Klammern wird festgelegt, wie weit der Nablaoperator wirken soll. Ganz konkret gilt mit der Einstein'schen Summenkonvention

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (g\vec{v} f) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(g v_i f) \\
&= \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i f + g \frac{\partial v_i}{\partial x_i} f + g v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \vec{\nabla} g \cdot \vec{v} f + g \vec{\nabla} \cdot \vec{v} f + g \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f, \\
\vec{\nabla} \cdot (g\vec{v}) f &= \frac{\partial}{\partial x_i}(g v_i) f \\
&= \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i f + g \frac{\partial v_i}{\partial x_i} f \\
&= \vec{\nabla} g \cdot \vec{v} f + g \vec{\nabla} \cdot \vec{v} f.
\end{aligned}$$

Da $\vec{v}$ lokalisiert angenommen wurde, gilt mit dem Satz von Gauß

$$\int \mathrm{d}^3x \, \vec{\nabla} \cdot (g\vec{v} f) = \int_F \mathrm{d}a \, g f \vec{v} \cdot \hat{n} = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3x \, (f\vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + g\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f) \\
&= \int \mathrm{d}^3x \, (f\vec{v} \cdot \vec{\nabla} g - \vec{\nabla} \cdot (g\vec{v}) f) \\
&= \int \mathrm{d}^3x \, (\underbrace{f\vec{v} \cdot \vec{\nabla} g - \vec{\nabla} g \cdot \vec{v} f}_{=0} - g \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{=0} f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Anwendungen

1. $f = 1$, $g = x_i$, $\vec{v} = \vec{J} \Rightarrow$

$$0 = \int \mathrm{d}^3x \, \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{\nabla}}_{= J_j \nabla_j} \, x_i = \int \mathrm{d}^3x \, J_j \delta_{ji} = \int \mathrm{d}^3x \, J_i.$$

2. $f = x_i$, $g = x_j$, $\vec{v} = \vec{J} \Rightarrow$

$$0 = \int \mathrm{d}^3x \, (x_i J_j + x_j J_i).$$

Folgerung

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3x' \, \vec{x} \cdot \vec{x}\,' J_i(\vec{x}\,')\hat{e}_i \\
&= \; x_j \int \mathrm{d}^3x' \, x'_j \, J_i(\vec{x}\,')\hat{e}_i \\
&\overset{2.}{=} \; \frac{1}{2} x_j \int \mathrm{d}^3x' \, \left[x'_j J_i(\vec{x}\,') - x'_i J_j(\vec{x}\,') \right] \hat{e}_i \\
&= \; -\frac{1}{2} x_j \int \mathrm{d}^3x' \, (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x'_l J_m(\vec{x}\,')\hat{e}_i.
\end{aligned}$$

Verwende $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$.

$$\begin{aligned}
\cdots &= -\frac{1}{2} \hat{e}_i \, \epsilon_{ijk} x_j \int \mathrm{d}^3x' \, \epsilon_{klm} x'_l J_m(\vec{x}\,') \\
&= -\frac{1}{2} \vec{x} \times \left(\int \mathrm{d}^3x' \, \vec{x}\,' \times \vec{J}(\vec{x}\,') \right).
\end{aligned}$$