S. Scherer 15. November 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Rechenregeln für die Determinante

(a) Addition einer Spalte bzw. einer Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes für die j-te Spalte bzw. i-te Zeile. Beachte, dass die jeweilige Streichungsmatrix A_{ij} dieselbe ist, so dass z. B.

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot(a_{ij}+b_{ij})\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\det(A_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot b_{ij}\det(A_{ij}).$$

(b) Multiplikation einer Spalte oder einer Zeile mit einer Zahl α:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \alpha a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis mithilfe des Laplace'schen Entwicklingssatzes für die j-te Spalte bzw. i-te Zeile.

(c) Das Vertauschen zweier Zeilen oder zweier Spalten ändert das Vorzeichen (Beweis mithilfe des ϵ-Symbols).

(d) Sind zwei Zeilen oder zwei Spalten gleich, folgt $\det(A) = 0$.

Beweis: Das Vertauschen der Zeilen ändert A nicht, aber $\det(A)$ ändert das Vorzeichen. Dies ist nur möglich, wenn $\det(A) = 0$.

(e)

$$\det\left(A^T\right) = \det(A).$$

(f) Determinante einer Diagonalmatrix

$$A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$
$$\det(A_{\text{diag}}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(g) Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$