Name:

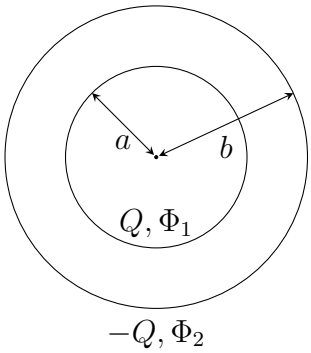
Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 3

1. [4]



Unter einem einfachen Kondensator versteht man eine Anordnung aus zwei benachbarten, isolierten Leitern.
Wird auf dem einen Leiter die Ladung Q und auf dem anderen die Ladung $-Q$ platziert, so entsteht zwischen den beiden eine Potenzialdifferenz $U = \Phi_1 - \Phi_2$. Als Kapazität bezeichnet man das Verhältnis zwischen dem Betrag der Ladung auf einem Leiter und dem Betrag der Potenzialdifferenz, $C = {}^{|Q|}/_{|U|}$.
Berechnen Sie die Kapazität von zwei konzentrischen Kugelschalen mit Radien a und b ($a < b$).

2. [1, 5] Gegeben seien zwei Punktladungen Q und $-Q$ an den Positionen $\vec{d}$ und $-\vec{d}$.

   a) Wie lautet das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$?

   b) Für $r = |\vec{x}| \gg d = |\vec{d}|$ können wir folgende Taylor-Reihenentwicklungen verwenden (5 Extrapunkte für die Herleitung):

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{d}|^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 + 3\frac{\vec{d}\cdot\hat{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right],$$
$$\frac{1}{|\vec{x} + \vec{d}|^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - 3\frac{\vec{d}\cdot\hat{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right].$$

   Betrachten Sie nun den Grenzfall $d \to 0$, $Q \to \infty$ bei konstantem, d. h. festgehaltenem Produkt $2Q\vec{d} = \vec{p}$ für festes $r > 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Grenzfall

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{3\hat{r}\,\vec{p}\cdot\hat{r} - \vec{p}}{r^3}$$

   gilt – es handelt sich dabei um das Feld eines elektrischen Dipols.

3. [6, 5] Wir betrachten das Intervall $I = [-a/2, a/2]$ und die Funktionenmenge

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right), \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right); n \in \mathbb{N}\right\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass die Elemente von S bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\; f(x)g(x)$$

orthonormiert sind. Vergessen Sie nicht den Fall $n \neq m$.

b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Entwickeln Sie f nach S, das heißt bestimmen Sie die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) und b_n ($n \in \mathbb{N}$) der Entwicklung

$$x = a_0 \frac{1}{\sqrt{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right).$$

Hinweis: Überlegen Sie, welche der Basisfunktionen gerade beziehungsweise ungerade auf I sind. Nutzen Sie dies bei der Integration aus.

4. [6] Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine quadratintegrierbare Funktion mit der Fourier-Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; a(k) e^{\mathrm{i}kx}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; |a(k)|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k' \; a^*(k') e^{-\mathrm{i}k'x}$$

und setzen Sie ein. Vertauschen Sie nun die Reihenfolge der Integrationen.

5. [3] Zeigen Sie, dass $R_l(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$ die gewöhnliche DGL

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

löst.

6. [10] Gegeben sei die DGL

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}\phi^2} + \alpha^2 Q = 0 \quad \text{mit } \alpha^2 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 < 0: \quad \alpha = i\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} > 0, \quad Q = Ae^{-\bar{\alpha}\phi} + Be^{\bar{\alpha}\phi}, \\
&\alpha^2 = 0: \quad Q = A + B\phi, \\
&\alpha^2 > 0: \quad \alpha > 0, \quad Q = Ae^{i\alpha\phi} + Be^{-i\alpha\phi}.
\end{aligned}$$

Wir fordern zusätzlich die Periodizitätseigenschaften $Q(0) = Q(2\pi)$ und $Q'(0) = Q'(2\pi)$. Zeigen Sie, dass dadurch $\alpha^2 < 0$ ausgeschlossen werden kann und dass $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$ ist.

Hinweis: Stellen Sie jeweils ein homogenes System von zwei Gleichungen in den zwei Unbekannten A und B auf. Dieses System hat nur eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet.