Name:

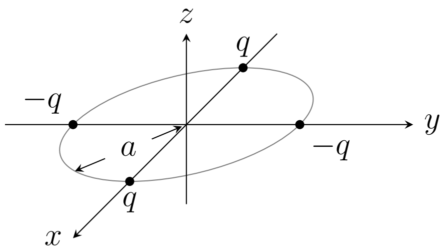
Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	$\sum$

Theoretische Physik 2 (M. Ed.) – Übung 2

1. $[3, 2, 2, 2]$ Gegeben sei eine Verteilung von vier Ladungen $\pm q$ in der (x, y)-Ebene, jeweils a vom Ursprung entfernt:



   a) Drücken Sie die Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in kartesischen Koordinaten mit Hilfe von Deltafunktionen aus.

      Hinweis: $\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$.

   b) Berechnen Sie das Potenzial $\Phi(\vec{x})$.

   c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$.

   d) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld auf der z-Achse verschwindet.

2. $[3]$ Zeigen Sie

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}.$$

3. $[3, 2, 4, 3]$ Gegeben sei die Wechselwirkungsenergie

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x \, \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3 |\vec{x} - \vec{x}_2|^3}.$$

   a) Es sei $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r\hat{n}$ mit $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $\vec{\rho} = (\vec{x} - \vec{x}_1)/r$ sowie $\rho = |\vec{\rho}\,|$, dass

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi r} \int \mathrm{d}^3\rho \, \frac{\vec{\rho} \cdot (\vec{\rho} + \hat{n})}{\rho^3 |\vec{\rho} + \hat{n}|^3}.$$

   b) Bestimmen Sie $\vec{\nabla}_\rho |\vec{\rho} + \hat{n}|^{-1}$. Schreiben Sie den Integranden mit Hilfe dieses Resultats um.

   c) Zeigen Sie nun mit Hilfe einer (mehrdimensionalen) partiellen Integration, dass

$$W_{\text{int}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi r} \left\{ \int \mathrm{d}^3\rho \, \vec{\nabla}_\rho \cdot \left[\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \frac{1}{|\vec{\rho} + \hat{n}|} \right] - \int \mathrm{d}^3\rho \, \vec{\nabla}_\rho \cdot \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \frac{1}{|\vec{\rho} + \hat{n}|} \right\}.$$

Wenden Sie auf das erste Integral den Satz von Gauß an. Begründen Sie, warum das Oberflächenintegral verschwindet.

d) Als Zwischenergebnis sollten Sie jetzt

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi r} \int \mathrm{d}^3\rho \, \vec{\nabla}_\rho \cdot \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \frac{1}{|\vec{\rho} + \hat{n}|}$$

erhalten haben. Was ist $\vec{\nabla}_\rho \cdot (\vec{\rho}/\rho^3)$? Setzen Sie das Resultat in W_{int} ein und integrieren Sie.

4. [2, 4, 3, 3] Gegeben sei das Modell für das Wasserstoffatom aus Übung 1, Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Energiedichte

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} E_r^2(r).$$

b) Berechnen Sie die elektrostatische potenzielle Energie über

$$W = \int \mathrm{d}^3x \, w(\vec{x}\,).$$

Dieses Resultat enthält die Selbstenergiebeiträge des Kerns und der Elektronenhülle.

c) Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3x \, [\rho_1(\vec{x}\,)\Phi_2(\vec{x}\,) + \rho_2(\vec{x}\,)\Phi_1(\vec{x}\,)].$$

Zum selben Resultat kommt man, wenn man nur die potenzielle Energie der einen Ladungsverteilung im Potenzial der jeweils anderen berechnet.

d) Bestimmen Sie nun die Selbstenergiebeiträge

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3x \, \vec{E}_1^2(\vec{x}\,) + \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3x \, \vec{E}_2^2(\vec{x}\,)$$

und addieren Sie das Resultat zu W_{int}.

5. [4] Es sei $\Phi(\vec{x}) = \phi(r)$ mit $r = |\vec{x}\,|$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\Big(r\phi(r)\Big).$$

Hinweis: Es ist $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{e}_r$ mit $\hat{e}_r = \vec{x}/r$ sowie $\vec{\nabla} \cdot (\Lambda\vec{A}) = \vec{\nabla}\Lambda \cdot \vec{A} + \Lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.