Name:

1	2	3	$\sum$

Übungsgruppe:
Bearbeitungszeit:

S. Scherer

Abgabe: 8. November 2019

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2019/2020
Übung 1

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   (a) [**1**] Berechnen Sie die Linearkombination $\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

   (b) [**3**] Testen Sie die Vektoren paarweise auf lineare Unabängigigkeit.

   (c) [**9**] Berechnen Sie für alle Vektoren den Betrag, sowie für alle Paare das Skalarprodukt und den eingeschlossenen Winkel.

   (d) [**3**] Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{a}$.

   (e) [**4**] Berechnen Sie explizit das doppelte Kreuzprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis der Graßmann-Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

   (a) [**1**] Drücken Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ durch die Komponenten a_i und b_j sowie das Delta-Symbol aus.

   (b) [**1**] Drücken Sie die i-te Komponente des Kreuzprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ durch a_j, b_k und das Epsilon-Symbol aus.

3. Als Ausgangspunkt betrachten wir die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \qquad (*)$$

   deren Beweis Sie unter der Rubrik Materialien finden.

   Beweisen Sie die folgenden Behauptungen der Reihe nach. Sie dürfen die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben verwenden.

   (a) [**3**] Zeigen Sie mithilfe von $(*)$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}.$$

   Hinweis: Unter Umständen müssen Sie die Indizes des Epsilon-Symbols in eine geeignete Reihenfolge bringen. Zur Erinnerung $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$.

(b) [**1**] Zeigen Sie

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

(c) [**6**] Verifizieren Sie mithilfe von (∗) (nicht durch explizites Ausrechnen) die Graßmann-Identität

$$\vec{a} \times \big(\vec{b} \times \vec{c}\big) = \vec{b}\big(\vec{a} \cdot \vec{c}\big) - \vec{c}\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big),$$

auch bekannt als „b(ac)−c(ab)"-Regel.

Tipp: Betrachten Sie die i-te Komponente $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i$ und verwenden Sie (∗).

(d) [**2**] Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times \big(\vec{b} \times \vec{c}\big) + \vec{b} \times \big(\vec{c} \times \vec{a}\big) + \vec{c} \times \big(\vec{a} \times \vec{b}\big) = \vec{0}.$$

Tipp: Verwenden Sie für die einzelnen Terme die Graßmann-Identität.

(e) [**6**] Zeigen Sie die Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Tipp: Starten Sie mit $\sum_{i=1}^{3}(\vec{a} \times \vec{b})_i(\vec{c} \times \vec{d})_i$ und verwenden Sie (∗).