S. Scherer 22. Oktober 2019

Theoretische Physik 2 (M.Ed.) WiSe 2019/2020
Präsenzübung 1

1. Gegeben seien ein skalares Feld $S(\vec{x})$ sowie ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$.

   (a) Wie sind $\vec{\nabla}S(\vec{x})$ und $\Delta S(\vec{x})$ in kartesischen Koordinaten definiert?

   (b) Bestimmen Sie $\vec{\nabla}S(\vec{x})$ für $S(\vec{x}) = \vec{k}\cdot\vec{x}$ und $S(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ mit festem $\vec{k}$.

   (c) Wie sind $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x})$ in kartesischen Koordinaten definiert?

   (d) Es sei $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}S(\vec{x})$. Bestimmen Sie $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x})$ für sowohl $S(\vec{x}) = \vec{k}\cdot\vec{x}$ als auch $S(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ aus Teilaufgabe (b).

2. Es sei ϕ ein differenzierbares Skalarfeld; des Weiteren sei $\vec{F}$ ein zweifach differenzierbares Vektorfeld.
   Verifizieren Sie folgende Differenziationsregeln:

   (a) $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{F} + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$,

   (b) $\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{F}\right) = \phi\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}\times\vec{\nabla}\phi$,

   (c) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{F}$.

   Machen Sie vom Epsilon-Tensor Gebrauch. Es gilt $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

3. Gegeben sei ein Viererpotenzial $(A^\mu(x))$, dessen Komponenten wir in KS durch

$$\left(A^0(x) := \Phi(t,\vec{x}), A^1(x) := A_x(t,\vec{x}), A^2(x) := A_y(t,\vec{x}), A^3(x) := A_z(t,\vec{x})\right)$$

   spezifizieren. Das elektrische und das magnetische Feld ist jeweils durch

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t}, \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{x})$$

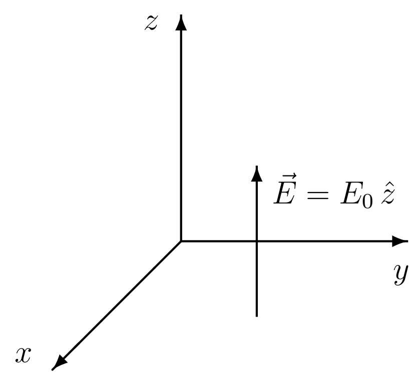
   gegeben. Zeigen Sie, dass die kontravarianten Komponenten des Feldstärketensors, $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, in KS durch folgendes Schema

$$(F^{\mu\nu}(x)) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E_x(t,\vec{x}) & -E_y(t,\vec{x}) & -E_z(t,\vec{x}) \\ \hline E_x(t,\vec{x}) & 0 & -B_z(t,\vec{x}) & B_y(t,\vec{x}) \\ E_y(t,\vec{x}) & B_z(t,\vec{x}) & 0 & -B_x(t,\vec{x}) \\ E_z(t,\vec{x}) & -B_y(t,\vec{x}) & B_x(t,\vec{x}) & 0 \end{array}\right)$$

   gegeben sind.

4. Zusatzaufgabe:

(a) Transformation eines $\vec{E}$-Feldes



Zeigen Sie, dass das Viererektorpotenzial (Spaltenschreibweise)

$$A^\mu(x) = \begin{pmatrix} -E_0 z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein konstantes, in z-Richtung orientiertes $\vec{E}$-Feld liefert,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ein mit beliebiger Geschwindigkeit in z-Richtung sich bewegender Beobachter das gleiche $\vec{E}$-Feld beobachtet.
Beobachtet er ein $\vec{B}$-Feld?