Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe

In diesem Anhang tragen wir einige Begriffe aus der (linearen) Algebra zusammen.

Definition eines Körpers. Eine nichtleere Menge $\mathbb{K}$ heißt ein **Körper**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Auf $\mathbb{K}$ ist eine Verknüpfung $+$ je zweier Elemente erklärt, die folgende Eigenschaften hat:

   (a) Abgeschlossenheit bzgl. Addition:
   $\forall\ a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K}$.

   (b) Assoziativgesetz bzgl. Addition:
   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   (c) Neutrales Element bzgl. Addition:
   $\exists\ 0 \in \mathbb{K}$ mit $0 + a = a\ \forall\ a \in \mathbb{K}$.

   (d) Inverses Element:
   $\forall\ a \in \mathbb{K}\ \exists\ b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$.

   (e) Kommutativgesetz bzgl. Addition:
   $a + b = b + a\ \forall\ a, b \in \mathbb{K}$.

2. Auf $\mathbb{K}$ ist eine weitere Verknüpfung (Multiplikation) erklärt, die folgende Eigenschaften besitzt:

   (a) Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation:
   $\forall\ a, b \in \mathbb{K}$ ist $ab \in \mathbb{K}$.

   (b) Assoziativgesetz bzgl. Multiplikation:
   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(ab)c = a(bc)$.

   (c) Einselement bzgl. Multiplikation:
   $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ und $1a = a\ \forall\ a \in \mathbb{K}$.

   (d) Inverses Element zu $a \neq 0$:
   $\forall\ a \in \mathbb{K}/\{0\}\ \exists\ b \in \mathbb{K}$ mit $ba = 1$.

   (e) Kommutativgesetz bzgl. Multiplikation:
   $ab = ba\ \forall\ a, b \in \mathbb{K}$.

3. Es gilt das Distributivgesetz:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{K}.$$

Standardbeispiele: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition einer Gruppe. Unter einer (abstrakten) **Gruppe** G verstehen wir eine nichtleere Menge, in der jedem geordneten Paar $(a, b) \in G \times G$ ein Element ab von G zugeordnet wird (Abgeschlossenheit), so dass gilt:

(G1) $a(bc) = (ab)c \ \forall \ a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz).

(G2) Es existiert ein Element $e \in G$ mit $ea = ae = a \ \forall \ a \in G$ (Einselement).

(G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $a^{-1} \in G$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (inverses Element).

Eine Gruppe G heißt genau dann **kommutativ** oder **abelsch**, wenn $ab = ba \ \forall \ a, b \in G$.

Definition eines Vektorraums. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V heißt ein $\mathbb{K}$**-Vektorraum** ($\mathbb{K}$-VR) oder linearer Raum über $\mathbb{K}$, falls gilt:

1. Auf V ist eine Verknüpfung $+$ (Vektoraddition) definiert, und V ist bzgl. $+$ eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element von V mit 0.

2. Für jedes $v \in V$ und jedes $k \in \mathbb{K}$ ist genau ein Element $kv \in V$ (Skalarmultiplikation) definiert. Dabei gilt:

   (a) Ist 1 das Einselement von $\mathbb{K}$, so ist $1v = v \ \forall \ v \in V$.
   (b) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v, \quad (k_1k_2)v = k_1(k_2v) \ \forall \ k_1k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$.
   (c) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2 \ \forall \ k \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$.

Definition eines affinen Raums. Ein affiner Raum $\mathbb{A} = (V, \mathcal{P}, v)$ besteht aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, einer Menge $\mathcal{P}$, deren Elemente Punkte genannt werden, und einer Abbildung $v : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to V$, die je zwei Elementen P, Q aus $\mathcal{P}$ einen Vektor $v(P, Q) \in V$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für alle Punkte $P \in \mathcal{P}$ und alle Vektoren $v \in V$ existiert genau ein Punkt $Q \in \mathcal{P}$ mit $v(P, Q) = v$.

2. $v(P, Q) + v(Q, R) = v(P, R) \ \forall \ P, Q, R \in \mathcal{P}$.

Schreibweise: $v(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$, d.h. $\overrightarrow{PQ}$ ist der dem Paar (P, Q) zugeordnete Vektor in V.

Bemerkungen:

1. Jeder Vektorraum V ist in trivialer Weise ein affiner Raum über sich selbst, wenn man die Abbildung $V \times V \to V$ mit $(v,w) \mapsto w - v$ betrachtet.

2. Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n$ ist der abstrakte affine Raum über dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Definition einer Norm. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt eine **Norm** auf V, wenn gilt:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

2. $\|kv\| = |k|\|v\| \ \forall \ v \in V, k \in \mathbb{K}$,

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall \ u, v, \in V$ (Dreiecksungleichung).

$\|v\|$: Norm von v. $(V, \|.\|)$: Normierter Vektorraum.

Definition einer Cauchy-Folge und eines Banach-Raums.

1. Eine Folge $(v_n)_{n \geq n_0}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|.\|)$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $k_0 = k_0(\epsilon)$ mit $\|v_m - v_n\| < \epsilon$ für $m, n > k_0$.

2. Der normierte Raum $(V, \|.\|)$ heißt **vollständig** oder ein **Banach-Raum**, wenn jede Cauchy-Folge in $(V, \|.\|)$ einen Grenzwert in V hat.

Definition eines Skalarprodukts. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt ein **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf V, wenn gilt:

1. $\langle v|v \rangle \geq 0 \ \forall \ v \in V, \quad \langle v|v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

2. $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle^* \ \forall \ u, v \in V$, insbesondere $\langle u|u \rangle$ reell,

3. $\langle u|\alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u|v \rangle + \beta \langle u|w \rangle \ \forall \ u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\langle u|v \rangle$: Skalares Produkt von u mit v. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$: Skalarproduktraum oder Prä-Hilbert-Raum. $\langle u|v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$.

Nomenklatur: Ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über dem Körper $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) heißt euklidischer Raum (unitärer) Raum.
Satz: Sei U ein vollständiger Unterraum des Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Dann läßt sich jedes $x \in V$ eindeutig darstellen in der Form

$$x = y + z \quad \text{mit} \quad y \in U, z \in U^\perp.$$

Es gilt also $V = U \oplus U^\perp$.

Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum. **Kanonische Norm:** $\|u\| := \sqrt{\langle u|u \rangle}$.

Definition eines Hilbert-Raums. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum und $\|.\|$ die kanonische Norm auf V. Ist $(V, \|.\|)$ vollständig, so heißt V ein **Hilbert-Raum**.

Definition eines metrischen Raumes. Eine nichtleere Menge M heißt genau dann ein **metrischer Raum**, wenn zwei beliebigen Punkten $u, v \in M$ eine reelle Zahl $d(u, v) \geq 0$ zugeordnet ist, so dass für alle $u, v, w \in M$ gilt:

1. $d(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$ (Symmetrie);
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (Dreiecksungleichung).

$d(u, v)$ heißt der Abstand zwischen den beiden Punkten u und v, das Paar (M, d) wird metrischer Raum genannt.

Für uns relevant:
Normierte Räume, Hilbert- und Banach-Räume sind metrische Räume:

$$d(x, y) := ||x - y||.$$