S. Scherer 25. Oktober 2019

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) WiSe 2019/2020

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Wir beweisen im Folgenden eine häufig verwendete Formel für das Epsilon-Symbol, die z. B. bei der Berechnung des doppelten Kreuzproduktes $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ verwendet werden kann:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Beweis: Wir schreiben zunächst die Summe über den stummen Index k aus,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ij1}\epsilon_{lm1} + \epsilon_{ij2}\epsilon_{lm2} + \epsilon_{ij3}\epsilon_{lm3}.$$

1. Für $i = j$ und/oder $l = m$ sind die Epsilon-Symbole gleich null. Deshalb ist jeweils mindestens ein Faktor der einzelnen Summanden gleich null und damit die Summe gleich null.

2. Für $i \neq j$ und $l \neq m$ kann immer nur ein Summand beitragen. Betrachten wir sukzessive die Summanden $\epsilon_{ij1}\epsilon_{lm1}$, $\epsilon_{ij2}\epsilon_{lm2}$ und $\epsilon_{ij3}\epsilon_{lm3}$, so stellen wir fest, dass im ersten Fall nur $(i, j) = (2, 3)$ oder $(i, j) = (3, 2)$ mit $(l, m) = (2, 3)$ oder $(l, m) = (3, 2)$ nichtverschwindend kombiniert werden kann, analog im zweiten Fall $(i, j) = (1, 3)$ oder $(i, j) = (3, 1)$ mit $(l, m) = (1, 3)$ oder $(l, m) = (3, 1)$ und schließlich im dritten Fall $(i, j) = (1, 2)$ oder $(i, j) = (2, 1)$ mit $(l, m) = (1, 2)$ oder $(l, m) = (2, 1)$. Als Produkte für die Epsilon-Symbole kommen die Werte

   $$1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1 \qquad (*)$$

   und

   $$1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1 \qquad (**)$$

   in Frage. Beispiele für $(*)$ sind $\epsilon_{123}\epsilon_{123}$ und $\epsilon_{213}\epsilon_{213}$, Beispiele für $(*)$ $\epsilon_{123}\epsilon_{213}$ und $\epsilon_{213}\epsilon_{123}$.

3. Die Summe kann also die Werte 0, 1 und -1 annehmen.

4. Für die Kombination $i = l$ und $j = m$ trifft der Fall $(*)$ zu, so dass wir dafür als Ergebnis $\delta_{il}\delta_{jm}$ schreiben, für $i = m$ und $j = l$ trifft der Fall $(**)$ zu, so dass wir hierfür $-\delta_{im}\delta_{jl}$ notieren, insgesamt also

   $$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

   Insbesondere verschwindet die rechte Seite für $i = j$ und/oder $l = m$, sodass auch Unterpunkt 1. erfüllt ist.