

Numerische Integration

Wiederholung:

Numerische Integration $\rightarrow$ Funktionsauswertung an Stützstellen.

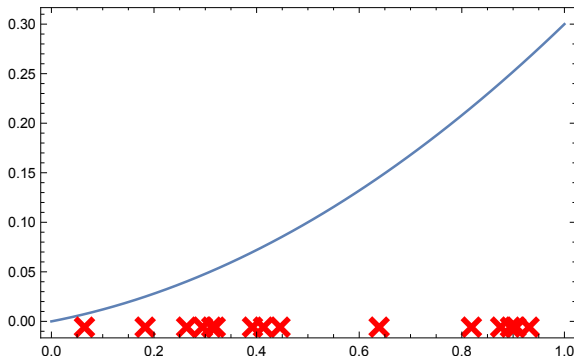
- ▶ äquidistant $\equiv$ Newton-Coates-Verfahren
- ▶ besonders gewählte Stützstellen $\equiv$ Gauß
- ▶ freie Stützstellenwahl $\equiv$ Spline

Was ist wenn wir die Stützstellen *zufällig* wählen?

Annahme die Zufallszahlen sind gleichverteilt dann ist das Integral

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (1)$$

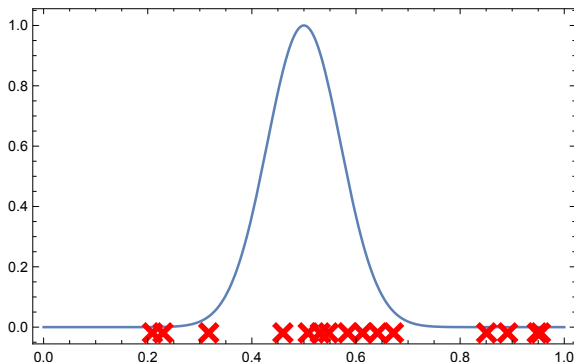
Beispiel



Rote Kreuze: Gleichverteilte zufällig gewählte Stützstellen

$$\int_0^1 (0.1x + 0.2x^2) dx \approx 0.121831 \pm 0.02484 \quad (2)$$

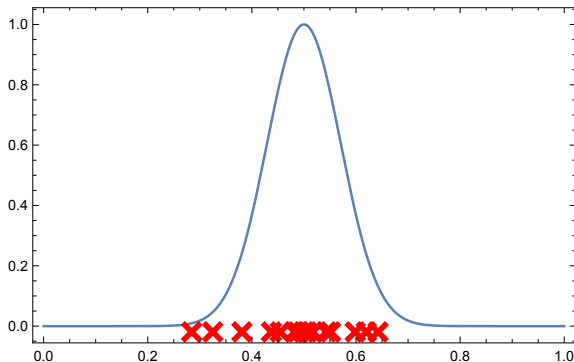
Beispiel: Funktion mit peak



Rote Kreuze: Gleichverteilte zufällig gewählte Stützstellen

$$\int_0^1 \exp \left[-\frac{(x - .5)^2}{.01} \right] dx \approx 0.301 \pm 0.10 \quad (3)$$

Beispiel: Funktion mit peak



Rote Kreuze: zufällig gewählte Stützstellen nach Gauß-Verteilung

$$\int_0^1 \exp \left[-\frac{(x - .5)^2}{.01} \right] dx \approx 0.18 \pm 0.02 \quad (4)$$

MC-Integration

Wenn der Integrand sich nicht stark ändert nähert der Mittelwert über gleichverteilte Zufallszahlen das Integral gut an.

Unter Umständen, z.B. gepeakter Integrand, ist die Anzahl der nötigen Stütztsellen groß.

Bsp:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5)$$

Finde eine Verteilungsfunktion, die dem Integrand ähnelt z.B. Breit-Wigner

$$g(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(x - \mu)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \quad (6)$$

Erzeuge Zufallszahlen, die der Breit-Wigner-Verteilung folgen (anstelle Gleichverteilung)

Importance-Sampling

Zieht man die Stützstellen aus einer Verteilung, die dem Integrand ähnlich ist wird die Varianz des Ergebnis kleiner!

Erzeugung der Zufallszahlen über Inversionsmethode:

Sei z gleichverteilte (in $[0, 1]$) Zufallsvariable

$$\int_{-\infty}^y g(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{2(\mu - y)}{\Gamma} \right] = z \quad (7)$$

$$\Rightarrow y = \left[\tan \pi \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\Gamma}{2} + \mu \quad (8)$$

D.h. man erzeugt $g(x)$ verteilte ZV indem man GV ZV in obige Gleichung einsetzt.

Importance-Sampling

Schreibe das Integral um

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{p(x)} g(x) dx \quad (9)$$

$$= \int_a^b p(x) g(x) dx \quad (10)$$

$$= E[p]_g = \langle p \rangle_g \quad (11)$$

entspricht dem Erwartungswert einer g -verteilten Zufallsgröße $p(x)$.

Importance-Sampling

Für unser Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \approx \int_{-5}^5 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (12)$$

N	GV ZV	ZV nach Fkt. $g(x)$
10	$1.33 \pm .49$	$.86 \pm .18$
100	$.73 \pm .12$	$.96 \pm .05$
1000	$1.07 \pm .04$	$1.007 \pm .015$
10000	$1.002 \pm .014$	$1.009 \pm .005$

Fehler skaliert etwa mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$

MC-Integration

Für das Einheitsintervall $\rightarrow \int_0^1 \cdot dx$ entspricht die MC-Integration der Bildung des arithmetischen Mittels.

Fehler entspricht dem Standardfehler des Mittelwerts

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \langle f \rangle = E[f] \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \frac{N}{N-1} (\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2) \quad \text{Varianz} \quad (14)$$

$$s = \sqrt{\sigma^2} \quad \text{Standardfehler} \quad (15)$$

$$\Delta I = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{Standardfehler d. MW} \quad (16)$$

MC Hit & Miss

Beispiel Berechnung von π

$$4 \int dy \int dx \Theta(1 - x^2 - y^2) dx dy = \pi \quad (17)$$

Ziehe gleichverteilte Zahlenpaare:

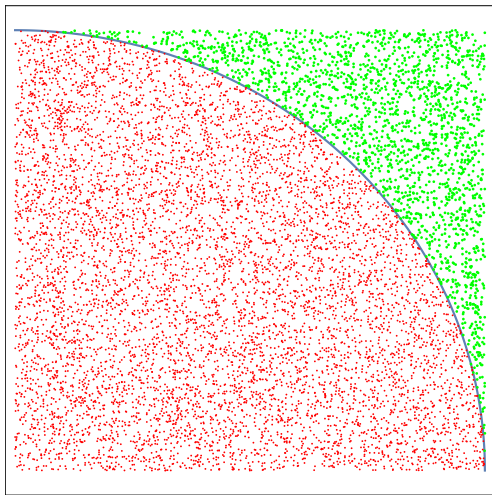
`{RandomReal[], RandomReal[]}`

In Worten:

- ▶ Würfle Zahlenpaar
- ▶ Zähle Punkte innerhalb des Einheitskreises $\equiv$ Treffer
- ▶ $4 \times$ Verhältnis aus Treffer und Gesamtzahl Würfe

Erzeuge den Funktionswert (Θ Funktion)

`If[(#[[1]]^2 + #[[2]]^2) <= 1, 4, 0] &`



$$\pi = 3.1568 \pm 0.0163$$

(18)

Quellcode

```
MC[N_] :=  
  Block[{, tab = Table[{RandomReal[], RandomReal[]}, {i, 1, N}];  
  res = If[(#\[Left[ 1]]^2 + #\[Left[ 2]]^2) <= 1, 4, 0] & /@ tab;  
  tab1 = DeleteCases[tab, _?(#\[Left[ 1]]^2 + #\[Left[ 2]]^2 <= 1 &)];  
  tab2 = DeleteCases[tab, _?(#\[Left[ 1]]^2 + #\[Left[ 2]]^2 > 1 &)];  
  Print[{1. Mean[res], StandardDeviation[res]/Sqrt[N] 1.}];  
  Show[Plot[Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}, AspectRatio -> 1],  
    ListPlot[tab1, PlotStyle -> Green],  
    ListPlot[tab2, PlotStyle -> Red], Frame -> True]]
```