Wiederholung

Simpsonregel

$$\int_a^b f = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right) + R_2 \qquad (1)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 2\sum_{i=2}^{n/2} f_{2i-2} + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-i} + f_n\right] \qquad (2)$$

Achtung

Beim klassischen Simpsonverfahren muss die Anzahl der Stützstellen ungerade sein.

Wiederholung

Lokaler Fehler

$$E_L = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit} \quad -h \leq \xi \leq h \tag{3}$$

$$E_g = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit } a \leq \xi \leq b \tag{4}$$

Simpson Integration mit gerader Stützstellenzahl

- Simpson-Regel fur n-1 + Trapez für das letzte Interval globaler Fehler

$$-\left(\frac{b-a-h}{180}h^4 f^{(4)}(\xi_1) + \frac{1}{2}h^3 f''(\xi_2)\right) = \mathcal{O}(h^3) \tag{5}$$

- besser mit Simpsons 3/8 Regel ($m = 3$) Grundinterval besteht aus vier Punkten mit $I \in [0, 3h]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + [2f_3 + 3f_4 + 3f_5] + \cdots + f_n) \tag{6}$$

$$E = -\frac{b-a}{80}h^4 f^{(4)}(\xi) = \mathcal{O}(h^4) \tag{7}$$

Formel in Klammern nur für $n > 3$

Achtung

Fehler bei 3/8 Regel der gleiche wie bei Simpson, daher wende die Regel nur auf die letzten 4 Punkte an.

Test mit exakt integrierbarem Beispiel:

$$\text{Trapez} \int_0^h 1 dx = \frac{h}{2}(1+1) = h \tag{8}$$

$$\text{Simpson} \int_0^{2h} 1 dx = \frac{h}{3}(1+4+1) = 2h \tag{9}$$

$$3/8 \int_0^{3h} 1 dx = \frac{3h}{8}(1+3+3+1) = 3h \tag{10}$$

Gauß-Integration

Idee am Bsp. einer Geraden

$$g(x) = bx + c \quad , \quad \text{mit } I \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} (bx + c)dx = 2c \tag{11}$$

Berechnung mit Newton-Coates

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{1}{2} 2 \left[g(-1) + g(1) \right] \tag{12}$$

Man sieht aber, dass das Integral mit nur einer Stützstelle exakt integriert werden kann

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2g(0) = 2c \tag{13}$$

Bei geeigneter Wahl der Stützstelle weniger Arbeit.

Satz

Durch geeignete Wahl von n Stützstellen und Gewichten werden beliebige Polynome bis zum Grad $2n-1$ im Interval $[-1,+1]$ exakt integriert.

Newton-Coates

Bei Newton-Coates lediglich $n-1$

Beweis des Satzes.
Sei $L_n(x)$ die Legendre-Polynome, welche ein vollständiges Orthoginalsystem (bzgl. Integration) auf dem Intervall $[-1,+1]$ bilden.
Zerlegung des zu integrierende Polynoms

$$P_{2n-1}(x) = L_n(x)P_{n-1}(x) + q_{n-1}(x) \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Praktisches Beispiel für $n = 2$

$$P_3(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2x \tag{16}$$

$$L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \tag{17}$$

Polynomdivision

$$P_{n-1}(x) = 2x + 4q_{n-1}(x) = 3x + 2 \tag{18}$$

$$\underbrace{3x^3 + 6x^2 + 2x}_{P_{2n-1}} = \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)(2x+4)}_{L_n(x) \cdot P_{n-1}} + \underbrace{3x+2}_{q_{n-1}} \tag{19}$$

Was bringt das?

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} P_{2n-1}(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} L_n(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0,\ \text{wg. Orhtogonalität}} + \int_{-1}^{1} q_{n-1}(x)dx \qquad (20)$$

Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} L_n L_m = \delta_{nm} \qquad (21)$$

zusammen mit der Darstellung des Restpolynoms

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x) \qquad (22)$$

Es reicht das Integral über den Rest zu bestimmen.

Welche Stützstellen sollte man wählen?

$$P_{2n-1}(x) = L_n(x)P_{n-1}(x) + q_{n-1}(x) \tag{23}$$
$$\tag{24}$$

Wähle Nullstellen von $L_n(x_i) = 0$, damit ist das zu integrierende Polynom eindeutig über q beschrieben.

$$P_{2n-1}(x_i) = L_n(x_i)P_{n-1}(x_i) + q_{n-1}(x_i) \tag{25}$$
$$P_{2n-1}(x_i) = q_{n-1}(x_i) \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

Erinnerung

$$\int f = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n \tag{28}$$

Ohne Herleitung:
Für die Integrationsgewichte findet man

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(L_n'(x_i))^2} \tag{29}$$

Restglied:

$$R_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left((2n)!\right)^3} f^{(2n)}(\xi) \tag{30}$$

Gaußfür beliebiges Intervall

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(h(x))h'(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(\tilde{x}_i)\tilde{w}_i + R_N \tag{31}$$

wobei

$$\tilde{x}_i = h(x_i) \quad \text{und} \quad \tilde{w}_i = h'(x_i)w_i \tag{32}$$

$$h(-1) = a \ , \ \ h(+1) = b \tag{33}$$

Spezielle Wahl für die Abbildung?

Linear Abb.

$$\tilde{x}_i = h(x_i) = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2} \tag{34}$$

$$\tilde{w}_i = h'(x_i) w_i = \frac{b-a}{2} w_i \tag{35}$$

Konforme Abb.

$$\tilde{x}_i = h(x_i) = c\frac{1+\alpha x}{1-\beta x} \tag{36}$$

$$\alpha = \frac{a+b-2ab/c}{b-a} \ , \ \beta = \frac{a+b-2c}{b-a} \ , \ h'(x) = c\frac{\alpha+\beta}{(1-\beta x)^2} > 0 \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

Vergleich Simpson und Gauß

Betrachte Intervall [-1,1]

$$R_n^{\text{Simpson}} = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \tag{39}$$

$$R_n^{\text{Gauß}} = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left((2n)!\right)^3} f^{(2n)}(\xi) \tag{40}$$

$$a = -1, b = 1, h\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \tag{41}$$

$$R_n^S = \frac{32}{180}\frac{1}{n^4} f^{(4)}(\xi) \tag{42}$$

	n=2	n=4	n=8	
Simpson R_n^S	$1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$\cdot f^{(4)}(\xi)$
GaußR_n^S	$7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-18}$	$\cdot f^{(2n)}(\xi)$

Achtung

Bei Gaußsehr hohe Ableitungen. $\rightarrow$ Probleme bei Funktionen mit numerischen Stabilitäten, z.B. bei Interpolationspolynomen.

	I	$f^{(16)}(x)$
$f(x) = \sin^2 x$	[0,1]	-10^4
$f(x) = e^{-x}$	[0,1]	2.5
$f(x) = e^{-x^2}$	[0,1]	10^8
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	[-1,1]	10^13

Verbesserung äquidistenter Methoden

Idee der Verbesserung der Taylorreihe.
Romberintegration:

- Berechne das Integral mit Trapezregel
- Führe die Berechnung mit verschiedenen Stützstellen, nutze die Funktionsauswertung an alter Stelle.

Setze voraus $f(x)$ ungerade auf [a,b], dann

$$I_{\text{exakt}} = \int_a^b f(x)dx \tag{43}$$

$$I_1 = I_{\text{Trapez}}(h) = I_{\text{exakt}} + ah^2 + bh^4 + \dots \tag{44}$$

$$I_2 = I_{\text{Trapez}}(h/2) = I_{\text{exakt}} + a(h/2)^2 + b(h/2)^4 + \dots \tag{45}$$

$$I_3 = I_{\text{Trapez}}(h/4) = I_{\text{exakt}} + a(h/4)^2 + b(h/4)^4 + \dots \tag{46}$$

(47)

Wir kennen I_n, wobei von $n \to n+1$ kann man die alten Funktionsauswertungen nutzen

$$\frac{4I_2 - I_1}{3} = I_{\text{exakt}} - \frac{1}{4} bh^2 + \dots \tag{48}$$

Systematische Verbesserung möglich.
Rekursionsformel für Trapez

$$R(1,1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \tag{49}$$

$$h = \frac{b-a}{2^n} \tag{50}$$

$$R(n+1,1) = \frac{1}{2}R(n,1) + h \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h) \tag{51}$$

$$R(n+1,m+1) = R(n+1,m) + \frac{4^m R(n+1,m) - R(n,m)}{4^m - 1} \tag{52}$$