Wiederholung

DGL $n$ter Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \tag{1}$$

Lösungsansatz $f(x) = a\ e^{\lambda x}$ führt zu charakteristischem Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

$\rightarrow$ Numerische Bestimmung der Nullstellen

Lösung von Gleichungen

- Standarform: $f(x) = 0$
- Polynome: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$

Satz:
Jedes Polynom $p_n(x)$ der Ordnung n besitzt n nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen. Einfach lösbares Bsp.

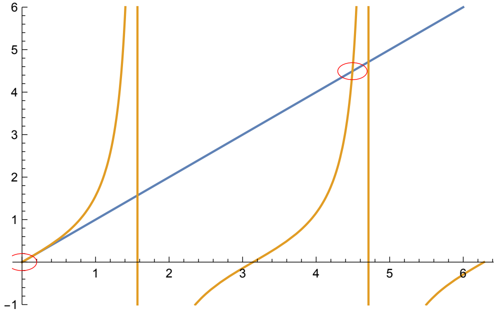
$$p_2(x) = x^2 - 2bx + b \Rightarrow \; x_{1/2} = b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

In geschlossener Form lösbar für $n \leq 4$
Für einige Spezialfälle kann man die Nullstellen exakt bestimmen, bei transzendenten Funktionen existieren nur eingeschränkt Lsg.

Lsg. über inverse Funktionen:

$$\sin x = 0 \to \arcsin 0 = x$$
$$x \log x = 0 \to e^{x \log x} = 1 \to x^x = 1$$

Bei einfachen Gleichungen bietet sich graphsiche Bestimmung an



Methode der Intervall-Halbierung

Satz von Bolzano:

Sei $f : [a, b] -> R$ stetig und $f(a) < 0, f(b) > 0$ dann existier ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$

```
procedure BISEKTION(f, a, b)
    n = (a−b)/2 + a/2                ▷ Intervallhalbierung
    while f(n) ≥ ϵ do                ▷ Abbruchbedingung
        if f(n) > 0 then
            b = n
        else
            a = n
        n = (b − a)/2                ▷ Neue Intervallgrenze
```

Konvergenzverhalten allgemein

Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine Folge, die gegen die Nullstelle x_0 konvergiert, dann konvergiert

- linear falls ein $a \in [0, 1]$, sodass

$$|x_{n+1} - x_0| < a|x_n - x_0|$$

- superlinear wenn

$$\frac{|x_{n+1} - x_0|}{|x_n - x_0|} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

- der Ordnung k, falls ein $c > 0$ existiert, sodass

$$|x_{n+1} - x_0| \leq c|x_n - x_0|^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Konvergenz Bisektionsverfahren

- Maximaler Fehler Bisektion $\equiv$ Intervallbreite
- Fehler der folgenden Iteration ist halbiert
  $\Rightarrow$ Näherung konvergiert linear gegen die Lösung
- Intervallbreite nach n Schritten $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon_0 \to \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_n} = n$

Vorteile

- Einfaches Verfahren
- Konvergenz garantiert
- Anzahl der Schritte zu gegebener Präzision berechenbar

Nachteile

- Nur lineare Konvergenz
- Findet nur eine Nullstelle

Lineare Interpolation

Approximiere f in der Nähe der Nullstelle durch Taylorreihe und behalte nur linearen Term.
Neue Intervallgrenze durch Nullstelle der Sekante

$$0 = mx_n + c \tag{3}$$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ , \ c = f(a) - ma \tag{4}$$

$$x_n = \frac{ma - f(a)}{m} \tag{5}$$

Anstelle der Intervallhalbierung

procedure REGULA FALSI(f, a, b)

$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$n = \frac{ma-f(a)}{m}$ ▷ neue Grenze

while $f(n) \geq \epsilon$ **do** ▷ Abbruchbedingung

  if $f(n) > 0$ **then**

    $b = n$

  else

    $a = n$

  $n = \frac{ma-f(a)}{m}$ ▷ neue Grenze

procedure $\textsc{Sekantenverfahren}(f, a, b)$

$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$n = \frac{ma-f(a)}{m}$ ▷ neue Grenze

while $f(n) \geq \epsilon$ **do** ▷ Abbruchbedingung

$n = \frac{ma-f(a)}{m}$ ▷ neue Grenze

Ersetze die ältere der beiden Intervallgrenzen

Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{6}$$

Konvergenz

Schreibe $x_n = x_0 + \epsilon_n$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - f(x_0 + \epsilon_n)\frac{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}{f(x_0+\epsilon_n) - f(x_0 + \epsilon_{n-1})}$$

Benutze

$$\begin{aligned}
f(x_0+\epsilon) &= \cancel{f(x_0)} + f'(x_0)\epsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\epsilon^2 + R_2(x_0) \\
&\approx \epsilon f'(x_0)(1 + M\epsilon), \quad \text{mit} \quad M = \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} \\
\Rightarrow f(x_0+\epsilon_n) - f(x_0+\epsilon_{n-1}) &\approx f'(x_0)(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})(1 + M(\epsilon_n + \epsilon_{n-1})) \\
\Rightarrow \epsilon_{n+1} &\approx \epsilon_n - \frac{\epsilon_n f'(x_0)(1+M\epsilon_n)(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})}{f'(x_0)(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})(1 + M(\epsilon_n + \epsilon_{n-1}))} \\
&= \frac{\epsilon_{n-1}\epsilon_n M}{1 + M(\epsilon_n + \epsilon_{n-1})} \\
&\approx \epsilon_{n-1}\epsilon_n M
\end{aligned}$$

Konvergenz

Ansatz $|\epsilon_{n+1}| \approx C|\epsilon_n|^p$

$$
\begin{aligned}
C|\epsilon_n|^p &= \epsilon_{n-1}\epsilon_n|M| \\
|\epsilon_n|^{p-1} &= \frac{|M|}{C}\epsilon_{n-1} \\
\Rightarrow |\epsilon_n| &\approx \left(\frac{|M|}{C}\right)^{1/(p-1)} |\epsilon_{n-1}|^{1/(p-1)} \\
\Rightarrow p &= \frac{1}{p-1} \rightarrow p = (1+\sqrt{5})/2 \\
\Rightarrow C &= M^{1/p}
\end{aligned}
$$

Unterschied

- Bei Regula Falsi bleibt die Nullstelle strikt eingegrenzt, globale Konvergenz garantiert
- Bei Sekantenverfahren ist die lokale Konvergenz vorhersagbar aber globale nicht garantiert

$$\lim |\epsilon_n| \approx C|\epsilon_{n-1}|^{\phi}$$

$$\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618 \quad \text{Goldener Schnitt}$$

$\Rightarrow$ superlineare Konvergenz

Weiterentwicklung

Lässt man beim Sekantenverfahren den Differenzenquotionenten gegen die Ableitung laufen
$\rightarrow$ Newtonverfahren

Newtonmethode

Wenn 1. Ableitung von $f(x)$ bekannt
$\rightarrow$ Approximation durch Tangente statt Sekante.
$\rightarrow$ Hierdurch wird 2. Punkt unnötig

$$0 = f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x+1) + \underbrace{(x - x_1)^2 \frac{f''(x_1)}{2}}_{\mathcal{O}(\Delta x^2)} + \ldots$$

Vernachlässige nichtlineare Terme

$$\Rightarrow x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

x ist neuer Punkt

procedure $\textsc{Newton}(f, a)$

$n = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ ▷ Startwert

while $f(n) \geq \epsilon$ **do** ▷ Abbruchbedingung

$n = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ ▷ Neuer Wert

Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Konvergenz

$$0 \equiv f(x_0) = f(x_n) + f'(x_n)(x_0 - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - x_n)^2$$

$$\Rightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x_0 - x_n) = -\frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - x_n)^2$$

$$\underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{x_n - x_{n+1}} + (x_0 - x_n) = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x_0 - x_n)^2$$

$$x_0 - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x_0 - x_n)^2$$

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}\epsilon_n^2$$

$$\Rightarrow |\epsilon_{n+1}| = |\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}|\epsilon_n^2$$

Wenn

- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ Intervall um die Nullstelle x_0
- $f''(x)$ stetig auf I
- Terme höherer Ordnung in Taylorreihe vernachlässigbar

Vorteile

- lokale Konvergenz quadratisch
- Zu Beginn nur Startwert nötig

Nachteile

- Intervall nicht eingegrenzt
  $\rightarrow$ gefundene Nullstell abhängig vom Startwert
- globale Konvergenz nicht gesichert

Zusammenfassung d. Methoden

Verfahren	Bisektion	Regula Falsi	Sekantenverfahren	Newton
globale Konvergenze	garantiert	garantiert	nicht garantiert	nicht garantiert
Konvergenz	linear	linear	superlinear	quadratisch
Auswertungen	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$ und $f'(x)$

Numerische Ableitung

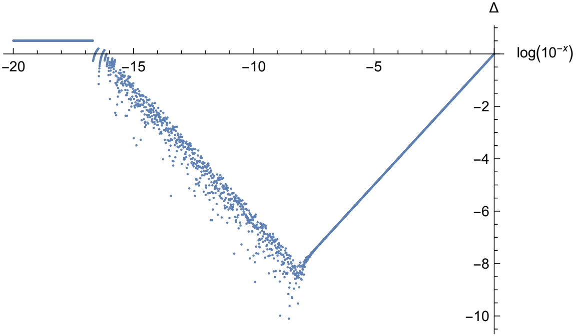
Definition der Ableitung über

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} && \text{Vorwärtsableitung}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon} && \text{Rückwärtsableitung}
\end{aligned}
$$

Naive Approximation

$$
f'(x) \approx \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{8}
$$

Je kleiner ϵ umso besser die Aproximation.
Wie gut ist die Näherung?



Rundungsfehler spielen eine Rolle!
Geplottet ist absolute Differenz zw. Näherung und Ableitung, im log-log Plot.

Taylorreihe

Sei $f(x)$ eine ∞-fach stetig differenzierbare Funtkion, dann heißt die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{9}$$

Taylorreihe.
Formale Definition ohne Betrachtung der Reihenkonvergenz.
Die Partialsumme

$$T_n(f, x_0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{10}$$

heißt Taylorpolynom

Taylorreihe

Sie $f(x)$ eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion, dann gilt

$$f(x) = T_n(f, x_0) + R_n(f, x_0) \tag{11}$$

wobei

$$R_n(f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{12}$$

mit $\xi \in [x_0, x]$.
Für die Näherung zur Ableitung schreiben wir

$$f(x+\epsilon) = T_1(f, x) + R_1(f, x) \tag{13}$$

$$= f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{f''(\xi)}{2!}\epsilon^2 \tag{14}$$

$$\left|\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} - f'(x)\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\epsilon\right| \tag{15}$$

Taylorreihe

Abschätzung über $f(\xi) \leq \max_{x \in [x, x+\epsilon]} f(x)$

$$\left| \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} - f'(x) \right| \leq \left| \frac{\epsilon}{2} \max_{x \in [x, x+\epsilon]} f''(x) \right| \tag{16}$$

Die Näherung ist $\mathcal{O}(\epsilon^1)$.
Kann man das verbesseren?

$$f(x+\epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)}{2}\epsilon^2 + \frac{f'''(\xi_+)}{3!}\epsilon^3 \tag{17}$$

$$f(x-\epsilon) = f(x) - f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)}{2}\epsilon^2 - \frac{f'''(\xi_-)}{3!}\epsilon^3 \tag{18}$$

$$f(x+\epsilon) - f(x-\epsilon) = 2f'(x)\epsilon + \left(\frac{f'''(\xi_+)}{6} + \frac{f'''(\xi_-)}{6} \right) \epsilon^3 \tag{19}$$

wobei $\xi_+ \in [x, x+\epsilon]$ und $\xi_- \in [x-\epsilon, x]$.

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x-\epsilon)}{2\epsilon} - f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{f'''(\xi_+)}{6} + \frac{f'''(\xi_-)}{6}\right)\epsilon^2 \quad (20)$$

Wenn $f'''(x)$ stetig auf $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ dann gilt (Zwischenwertsatz)

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}\left(f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)\right) \quad (21)$$

Damit ist

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x-\epsilon)}{2\epsilon} - f'(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi_+)\epsilon^2 \quad (22)$$

Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Weitere Verbesserung mittels weiterer Entwicklungspunkte.

Rundungsfehler

Berechnung zur Präzision ϵ_0, d.h

$$\overline{f(x)} = f(x)(1+\epsilon) = f(x) \quad \forall \epsilon < \epsilon_0 \tag{23}$$

Aus der Taylorabschätzung folgt

$$\frac{\overline{f(x+\delta)} - \overline{f(x)}}{\delta} - f'(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\delta \tag{24}$$

$$\frac{f(x+\delta)(1+\epsilon_1) - f(x)(1+\epsilon_2)}{\delta} - f'(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\delta \tag{25}$$

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} - f'(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\delta - \frac{\epsilon_1 f(x+\delta) - \epsilon_2 f(x)}{\delta} \tag{26}$$