Schwingungen

Definition

Zeitlich sich widerholende Schwankungen von Zustandsgrößen

Klasifizierung nach

- periodische vs. nichtperiodische
- gedämpfte vs. ungedämpfte
- freie vs. erzwungene

Wenn gilt

$$f(t) \sim \sin(\omega t)\,\text{oder}\,\cos(\omega t)$$

$\Rightarrow$ Harmonische Schwingung

Harmonische Schwingungen

Häufige Anwendung in der Physik z.B.

- elektischer Schwingkreis
- Vibration einer Stimmgabel, Schwingung einer Klaviersaite
- Mathemat. Fadenpendel für kleine Auslenkungen
- Masse an eine Feder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

Beschreibung der Phänomene als Lösung einer Differentialgleichung

Differentialgleichungen

- Definition einer DGL n-ter Ordnung

$$f^{(n)}x + \cdots + a_2(x)f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = g(x) \tag{2}$$

- Ableitung nach nur einer Variabken $\rightarrow$ gewöhnlich (ansonsten partiell)
- wenn f und alle Ableitungen $f^{(n)}(x)$ linear vorkommen $\rightarrow$ lineare DGL
- $g(x) = 0 \rightarrow$ homogen
- wenn alle $a_n(x)$ unabhängig von x $\rightarrow$ mit konst. Koeff.

Wiederkehrendes Beispiel, sehr häufige Anwendung

$$m\ddot{x} + 2r\dot{x} + cx = F_0 \cos \eta t \tag{3}$$

Inhomogene, lineare, gewöhnliche DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

5 Parameter, Reduktion durch Rückführung auf Normalform

$$\ddot{x} + 2 \underbrace{\frac{r}{m}}_{D} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{A} \cos \eta t \tag{4}$$

$\rightarrow$ 4 Parameter, nach Reskalierung der Zeit

$$\tau = \omega_0 t \ , \ \frac{d}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{d}{d\tau} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \tag{5}$$

$$\omega_0^2 x'' + 2D\omega_0 x' + \omega_0^2 x = A \cos \frac{\eta}{\omega_0} \tau \tag{6}$$

DGL gedämpfter harmonischer Oszillator, mit äußerer Anregung

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = A\cos\eta t \tag{7}$$

(a) Lsg. homogene DGL
Ansatz: $x_h(t) = ae^{i\omega t}$, $a \in C$
Einsetzen in DGL liefert charakteristisches Polynom

$$-\omega^2 + 2Di\omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow \omega_{1/2} = iD \pm \sqrt{\underbrace{1 - D^2}_{\alpha}} \tag{8}$$

Fallunterscheidung

- $\alpha = 0 \Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall
  Doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ Fundamentalsystem (e^{-Dt}, te^{-Dt})
  $\rightarrow\ x_h(t) = e^{-Dt}(c_1 + t \cdot c_2)$

- $\alpha < 0 \;\Rightarrow$ überdämppfter Fall
  $\tilde{\omega}_{1/2} = \left(D \pm \sqrt{D^2 - 1}\right) \Rightarrow$ Fundamentalsystem
  $(e^{-\tilde{\omega}_1 t}, e^{-\tilde{\omega}_2 t})$
  $x_h(t) = c_1 e^{-\tilde{\omega}_1 t} + c_2 e^{-\tilde{\omega}_2 t}$
- $\alpha > 0 \;\Rightarrow$ Schwingungsfall
  $\omega_{1/2} = iD \pm \sqrt{1 - D^2}$ $\Rightarrow$Fundamentalsystem
  $(e^{-Dt} e^{i\sqrt{\alpha}t}, e^{-Dt} e^{-i\sqrt{\alpha}})$
  $x_h(t) = e^{-Dt}\left(c_1 \cos(\sqrt{1 - D^2}t) + c_2 \sin(\sqrt{1 - D^2}t)\right)$
  Nutze $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
  $x_h(t) = Ce^{-Dt}\cos\left(\sqrt{1 - D^2}t - \phi\right)$

(b) Partikuläre Lösung

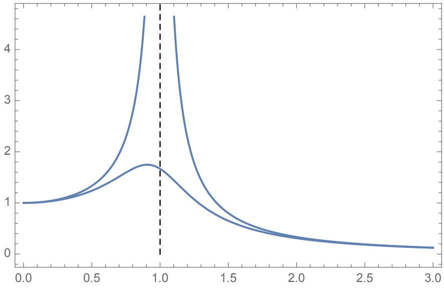
Ansatz: $x_p(t) = VA\cos(\eta t - \psi)$

$V \equiv$ Verstärkungsfaktor, $\psi \equiv$ Phasenfaktor

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2}}, \tag{9}$$

$$\tan\psi = \frac{2\eta D}{1-\eta^2} \tag{10}$$

Out[74]=



Phasenraum

Generelle Idee:
DGL n-ter Ordnung darstellbar als n gekoppelte DGLs 1. Ordnung

$$\dot{y}_1 = f_1(t, \underbrace{y_1, \dots y_n}_{\vec{y}}) \tag{11}$$

$$\dot{y}_2 = f_2(t, \vec{y}) \tag{12}$$

$$\vdots \tag{13}$$

$$\dot{y}_n = f_n(t, \vec{y}) \tag{14}$$

Allgmein also

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{15}$$

wobei f das Richtungsfeld genannt wird.

Phasenraum

Gilt zusätzlich

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$$

DGL ist autonom

$$\dot{\vec{y}} = 0 = \vec{f}(\vec{y_*})$$

heißen kritische Punkte (Gleichgewichtspunkte).
Ersetze eine DGL n-ter Ordnung nach folgender Vorschrift

$$\dot{y}_1 = y_2 \tag{16}$$
$$\dot{y}_2 = y_3 \tag{17}$$
$$\vdots \tag{18}$$
$$\dot{y}_{n-1} = y_n \tag{19}$$
$$\dot{y}_n = f(t, \vec{y}) \tag{20}$$

Entspricht Einführung von n Zustandgrössen. Bsp. n=2

$$y_1 = x(t) \tag{21}$$

$$y_2 = v(t) \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Gesamtheit aller $(x(t), v(t))$ bilden den Phasenraum des dynamischen Systems

$$\dot{x} = v \tag{24}$$

$$\dot{v} = -2Dv - x \tag{25}$$

Autonomes DGL-System 1. Ordnung. Jedem Punkt (x, v) kann eindeutig ein Richtung zugeschrieben werden.
Im Falle autonomer DGL gilt

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} \tag{26}$$

Hieraus folgt

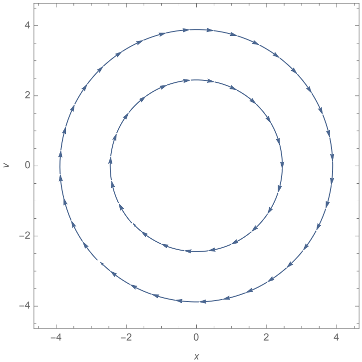
$$\frac{dv}{dx} = \frac{\ddot{x}}{v} = -2D - \frac{x}{v} \tag{27}$$

Existenz und Eindeutigkeiit von Lösung (Sätze von Peano und Picard-Lindelöf)
$\Rightarrow$ Phasenraumkurven sind eindeutig und schneiden sich nicht
Konstruktion der Phasenraumkurven über Richtungsfeld
Bsp:

(a) $D = 0$ keine Dämpfung
$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v} \Rightarrow vdv = -xdx$
Lsg:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$$

Out[102]=

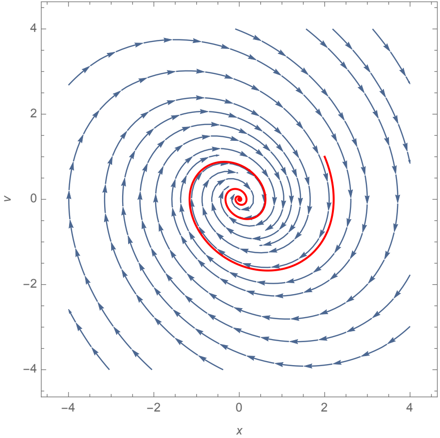


Zwei Lsg. gehören zu 2 Energien

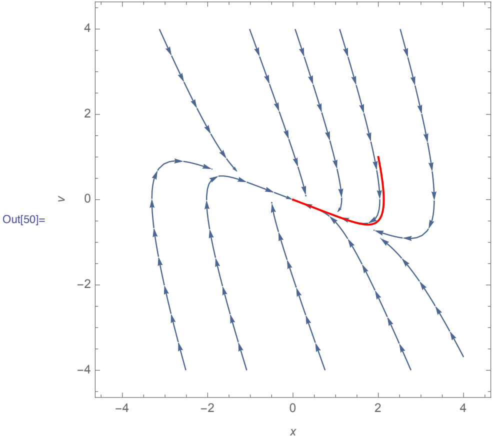
$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{x^2}{2}$$

(b) Schwache Dämpfung
Energie nimmt im Laufe der Zeit ab

Out[39]=



(c) Starke Dämpfung
Bahn stürzt ab



$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = A\cos\eta t \tag{28}$$

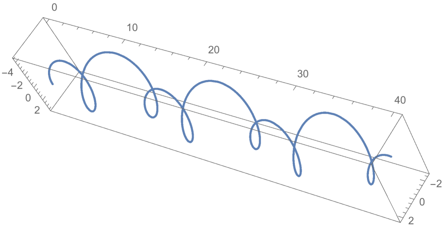
Umschreiben in DGL 1. Ordnung:

$$\dot{x} = v \tag{29}$$
$$\dot{v} = -2Dv - x + A\cos z \tag{30}$$
$$\dot{z} = \eta \tag{31}$$

System von 3 gek. DGL 1. Ordnung $\rightarrow$ System zwar deterministisch kann aber chaotisch werden.

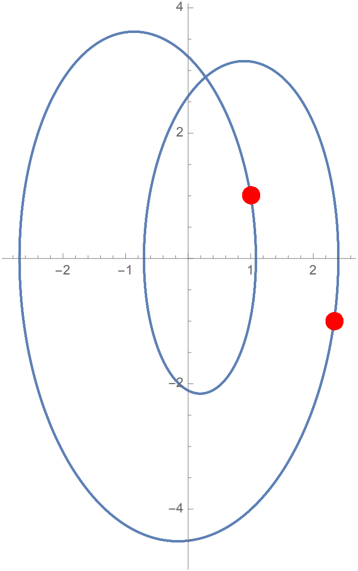
Ohne Dämpfung

Out[494]=



Ohne Dämpfung

Out[506]=



Analyse des asymptotischen Verhaltens

Alternative zur Analyse mittels Phasenraumportrait
Poincare Plot
Trage nur die Punkt zu bestimmten Zeiten t auf

$$t = m \cdot T \ , \ m \in Z$$

wobei

$$T = \frac{2\pi}{\eta}$$