

Theoretische Physik für Lehramtskandidaten
I (WS 2008/2009) und II (SS 2009)
Vorlesungsskript

Mechanik, spezielle Relativitätstheorie,
Elektrodynamik und Quantenmechanik

Stefan Scherer
Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Newton'sche Mechanik	1
1.1	Mathematische Vorbemerkungen	1
1.2	Newton'sche Axiome	9
1.3	Einheiten	11
1.4	Inertialsysteme und Galilei-Transformation . . .	12
1.4.1	Inertialsystem	12
1.4.2	Galilei-Transformation	13
1.5	Arbeit, Leistung, kinetische und potenzielle Energie	15
1.5.1	Vorbemerkung: Wegintegral	15
1.5.2	Arbeit	16
1.5.3	Leistung	16
1.5.4	Kinetische Energie	16
1.5.5	Konservative Kraft I	17
1.5.6	Potenzielle Energie und Energieerhaltung	17
1.5.7	Konservative Kraft II	18
1.5.8	Motivation für Satz von Stokes	20
1.5.9	Konservative Kraft III: Beispiel	22
1.6	Das Zweikörperproblem	23
1.6.1	Schwerpunktkoordinaten und Gesamtimpulserhaltung	24
1.6.2	Relativkoordinaten	25
1.6.3	Spezialfälle und Anwendungen	25
1.7	Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Kepler-Problem)	26
1.7.1	Bewegungsgleichungen	26
1.7.2	Zentralpotenzial	27
1.7.3	Relativdrehimpuls und Flächensatz . . .	27

1.7.4	Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen	29
1.7.5	Lösungsstrategie	30
1.7.6	Qualitative Diskussion	32
1.7.7	Explizite Lösung für das Kepler-Problem	33
1.8	Systeme von endlich vielen Teilchen	40
1.8.1	Schwerpunktsatz	41
1.8.2	Drehimpulssatz	42
1.8.3	Energiesatz	43
1.8.4	Erhaltungsgrößen für abgeschlossene n -Teilchensysteme	43
2	Prinzipien der kanonischen Mechanik	44
2.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	44
2.2	D'Alembert'sches Prinzip	46
2.2.1	Virtuelle Verrückungen und Prinzip der virtuellen Arbeit	46
2.2.2	Statischer Fall	47
2.2.3	Beispiel für statischen Fall	49
2.2.4	Dynamischer Fall	51
2.2.5	Die Lagrange-Gleichungen 2. Art	52
2.2.6	Beispiele: Lagrange-Funktion und -Gleichungen	57
2.3	Funktionale, Variationsrechnung und Hamilton'sches Prinzip	61
2.3.1	Funktional	62
2.3.2	Variationsrechnung	62
2.3.3	Hamilton'sches Prinzip der minimalen Wirkung	64
2.4	Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichungen	64
2.4.1	Beispiel Lorentz-Kraft	65
2.4.2	Nicht-Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion	67
2.4.3	Beispiel	68
2.4.4	Lagrange-Gleichungen mit Nebenbedingungen in Gleichungsform	69
2.5	Symmetrien und Erhaltungssätze	73

2.5.1	Verallgemeinerter Impuls	74
2.5.2	Zyklische Koordinate	74
2.5.3	Noether-Theorem	75
2.5.4	Beispiele	78
2.5.5	Hamilton-Funktion	79
2.6	Hamilton-Formalismus	81
2.6.1	Hamilton-Funktion	81
2.6.2	Kanonische Gleichungen	83
2.6.3	Poisson-Klammer und Bewegungsintegrale	86
2.6.4	Kanonische Transformationen	89
2.6.5	Phasenraum	93
3	Drehungen, Tensoren und Tensorfelder	97
3.1	Orthogonale Transformationen	97
3.2	Tensoren	103
3.2.1	Definition	103
3.2.2	Tensor nullter Stufe	103
3.2.3	Tensor 1. Stufe	104
3.2.4	Tensor 2. Stufe	104
3.2.5	Rechenregeln zur Konstruktion weiterer Tensoren	104
3.2.6	Fundamentaltensor 2. Stufe	105
3.2.7	Symmetrieeigenschaften	105
3.2.8	Epsilontensor	106
3.2.9	Pseudotensoren	107
3.3	Tensorfelder	109
3.3.1	Definition	109
3.3.2	Ableitungen von Tensorfeldern	109
3.4	Tensorgleichungen und Kovarianz	110
4	Spezielle Relativitätstheorie	113
4.1	Motivation	113
4.1.1	Galilei'sches Relativitätsprinzip	113
4.1.2	Grenzen der Gültigkeit	116
4.2	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	117
4.3	Spezielle Lorentz-Transformationen	118
4.4	Diskussion	121

4.4.1	Nichtrelativistischer Grenzfall	121
4.4.2	Addition von Geschwindigkeiten (parallele Richtungen)	121
4.4.3	Homogene Lorentz-Gruppe L oder $O(1,3)$	122
4.4.4	Längenkontraktion und Zeitdilatation . .	125
4.4.5	Zeitdilatation	128
4.4.6	Maximale Geschwindigkeit	129
4.4.7	Abstandsbegriff und Minkowski-Diagramm	130
4.4.8	Eigenzeit	133
4.5	Vierervektoren und Tensoren	134
4.5.1	Vierervektoren	134
4.5.2	Lorentz-Tensoren	135
4.5.3	Lorentz-Tensorfelder	139
4.5.4	Postulat der speziellen Relativität	140
4.6	Relativistische Dynamik	141
4.6.1	Relativistisches Kraftgesetz	141
4.6.2	Energie und Impuls	143
4.6.3	Konsequenzen aus Energie- und Impulserhaltung	145
4.6.4	Lorentz-Kraft	152
5	Maxwell-Gleichungen	154
5.1	Kovariante Form	154
5.2	Zusammenstellung Elektro- und Magnetostatik .	156
5.2.1	Coulomb-Gesetz und elektrische Feldstärke	157
5.2.2	Dirac'sche Deltafunktion	159
5.2.3	Gauß'sches Gesetz	162
5.2.4	Differenzielle Form	164
5.2.5	Stetigkeit an Grenzflächen	164
5.2.6	Skalares Potenzial	166
5.2.7	Poisson- und Laplace-Gleichung	168
5.2.8	Green'sche Sätze	169
5.2.9	Randwertprobleme und Eindeutigkeit . .	171
5.2.10	Beispiele	173
5.2.11	Formale Lösung mit Green'scher Funktion	173

5.2.12	Elektrostatische, potenzielle Energie und Energiedichte	175
5.2.13	Separation der Variablen für Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten	178
5.2.14	Orthogonale Funktionen und Entwicklun- gen	182
5.2.15	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Legendre-Polynome	184
5.2.16	Zylindersymmetrisches Problem	191
5.2.17	Zugeordnete Legendre-Funktionen und Ku- gelfunktionen	193
5.2.18	Multipolentwicklung	196
5.3	Kontinuitätsgleichung	199
5.4	Magnetostatik	200
5.4.1	Ampere'sches Gesetz	201
5.4.2	Vektorpotenzial und Poisson-Gleichung .	201
5.4.3	Gesetz von Biot und Savart	203
5.4.4	Magnetische Dipoldichte und magnetisches Moment	204
5.4.5	Magnetische Energiedichte und Energi- einhalt	207
5.5	Zeitlich veränderliche Felder, Maxwell- Gleichungen	208
5.5.1	Faraday'sches Induktionsgesetz	208
5.5.2	Maxwell'scher Verschiebungsstrom . . .	210
5.5.3	Maxwell-Gleichungen im Vakuum	211
5.5.4	Energiedichte, Poynting-Vektor und Poynting- Theorem	212
5.5.5	Skalares und Vektorpotenzial	215
5.5.6	Eichtransformationen, Lorenz-Bedingung, Coulomb-Eichung	216
5.5.7	Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen	218
5.5.8	Ebene elektromagnetische Wellen im Va- kuum	225
5.6	Lagrange-Formalismus für das elektromagneti- sche Feld*	230

5.6.1	Lagrange-Formalismus für Felder	230
5.6.2	Freies, reelles, skalares Feld Φ	234
5.6.3	Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einer vorgegebenen äußeren Stromdichte J^μ . .	236
6	Nichtrelativistische Quantenmechanik	238
6.1	Grenzen der klassischen Physik	238
6.1.1	Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen	238
6.1.2	Welleneigenschaften von Materie	241
6.1.3	Dualismus Teilchen-Welle	242
6.1.4	Diskrete Zustände	242
6.1.5	Äquivalente Formulierungen der Quan- tenmechanik	242
6.2	Wellenfunktion und Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens	243
6.2.1	Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeits- interpretation	243
6.2.2	Schrödinger-Gleichung für ein freies Teil- chen	244
6.2.3	Superposition monochromatischer, ebener Wellen	245
6.2.4	Eindimensionale Wellenpakete	247
6.3	Exkurs in den Hilbert-Raum	254
6.3.1	Skalarprodukt, Hilbert-Raum, Orthonor- malbasis, Vollständigkeit	254
6.3.2	Lineare Operatoren	256
6.3.3	Beschreibung von Observablen durch her- mitesche Operatoren	260
6.3.4	Dirac'sche Bra- und Ket-Schreibweise . .	264
6.3.5	Messgrößen und Erwartungswerte, Unschärfe- relation	268
6.4	Zeitliche Veränderung eines Systems	270
6.4.1	Schrödinger-Gleichung	271

6.4.2	Kontinuitätsgleichung, Erhaltung der Wahrscheinlichkeit	272
6.4.3	Zeitliche Änderung von Observablen . . .	273
6.4.4	Stationäre Zustände	276
6.4.5	Eindimensionale Probleme	277
6.5	Drehimpuls und Spin	288
6.5.1	Drehimpulsoperatoren als Erzeugende von Drehungen	288
6.5.2	Bahndrehimpulseigenzustände	291
6.5.3	Algebraische Ableitung der Drehimpulseigenwerte	298
6.5.4	Spin	302
6.6	Das Zentralkraftproblem	307
6.6.1	Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung .	307
6.6.2	Qualitative Betrachtungen	309
6.6.3	Freie Bewegung	310
6.6.4	Das Wasserstoffatom	312
6.7	Näherungsmethoden für stationäre Zustände . .	318
6.7.1	Zeitunabhängige Störungstheorie	318
6.7.2	Störungstheorie für nicht entartete Zustände	319
6.7.3	Störungstheorie für entartete Zustände .	321
6.7.4	Variationsprinzip	322
7	Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe	325

Literatur

1. Mathematik

- H. J. Korsch, *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik* (Binomi-Verlag, Barsinghausen, 2007)
- K.-H. Goldhorn und H.-P. Heinz, *Mathematik für Physiker 1 - 3* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007 (1 und 2), 2008 (3))
- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2004)
- I. N. Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik* (Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008)

2. Mechanik

- T. Fließbach, *Mechanik* (Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2007)
- H. Goldstein et al., *Klassische Mechanik* (WILEY-VCH, Weinheim, 2006)
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik* (WILEY-VCH, Weinheim, 2008)
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Mechanik* (Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2004)
- F. Scheck, *Theoretische Physik 1, Mechanik* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007)
- A. Sommerfeld, *Mechanik* (Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1994)

3. Elektrodynamik und klassische Feldtheorie

- S. Brandt und H. D. Dahmen, *Elektrodynamik* (4. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2005)
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1975)
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* (Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997)
- F. Scheck, *Theoretische Physik 3, Klassische Feldtheorie* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004)

4. Quantenmechanik

- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantenmechanik, Band 1* (de Gruyter, Berlin, 2007)
- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantenmechanik, Band 2* (de Gruyter, Berlin, 2008)
- T. Fließbach, *Quantenmechanik* (Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008)
- G. Grawert, *Quantenmechanik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1977)
- J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Redwood City, 1985)
- F. Scheck, *Theoretische Physik 2, Nichtrelativistische Quantentheorie* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2000)
- F. Schwabl, *Quantenmechanik (QM1)* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998)

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

1.1 Mathematische Vorbemerkungen

- Ziel: Beschreibung der Bahnkurve eines oder mehrerer Massenpunkte mit Hilfe von Naturgesetzen.
- 1. Bewegung eines Körpers ist als Bewegung *relativ* zu etwas anderem zu verstehen.
 2. Wähle geeignete „Gegenstände“ als Bezugspunkte zur Beschreibung der Bewegung $\Rightarrow$ Bezugssystem (BS).
Versehe BS mit Uhr.
 3. Versehe BS mit geeigneten Koordinaten $\Rightarrow$ Koordinatensystem (KS).
- Beschreibung des Raums mit Hilfe des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums $\mathbb{E}^3$:
 1. Schritt: Menge $\mathbb{R}^3$ (dreifaches kartesisches Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst; Verallgemeinerung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ klar):

$$\mathbb{R}^3 = \{x = \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\text{geordnete Tripel}} : x_i \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

2. Schritt: Vektorraum¹ $\mathbb{R}^3$ (umgangssprachlich: Vektor = gerichtete Größe mit Länge; wir ändern Symbolik

¹Manchmal findet man auch die Schreibweise $\mathbb{R}^{(n)}$ mit der Dimension n in runden Klammern, um anzudeuten, dass man die Menge $\mathbb{R}^n$ mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation versehen hat.

von x nach $\vec{x}$, um Vektorcharakter zu unterstreichen).
Abgeschlossen bzgl.

$$\begin{aligned}\text{Vektoraddition: } \vec{x} + \vec{y} &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),\end{aligned}$$

$$\text{Skalarmultiplikation: } k \cdot \vec{x} = (kx_1, kx_2, kx_3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Verschiedene Schreibweisen

(a) Darstellungsfrei: $\vec{x}$

(b) Als Linearkombination:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 k_i \vec{v}_i,$$

wobei $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis sei. Die $k_i \vec{v}_i$ heißen Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{B}$.

(c) Mit Einstein'scher Summenkonvention (über wiederholt auftretende Indizes wird summiert):

$$\vec{x} = k_i \vec{v}_i.$$

(d) Als Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{B}$ (Spaltenschreibweise; Vorsicht: Physiker unterscheiden häufig nicht zwischen Vektor und Koordinatenvektor und verwenden dieselbe Symbolik²):

$$X = X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3 \times 1}.$$

$\mathbb{R}_{m \times n}$ ist die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten.

(e) Kanonische Basis $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (1, 0, 0), \\ \hat{e}_2 &= (0, 1, 0), \\ \hat{e}_3 &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

²Man findet auch

$$x_{\mathcal{B}} = (k_1, k_2, k_3)$$

als Koordinatenvektor.

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \\
&= x_i \hat{e}_i \quad (\text{Einstein'sche Summenkonvention}) \\
&= (x_1, x_2, x_3) \quad (\text{Zeilenschreibweise}).
\end{aligned}$$

x_i : Koordinate von $\vec{x}$ bzgl. der kanonischen Basis.
Besondere der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow X_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vorsicht: Auch wir werden im Allg. nicht zwischen $\vec{x}$ und $X_{\mathcal{K}}$ unterscheiden.

- (f) Ganz allgemein: Vektorraumaxiome gelten unabhängig von der konkreten Wahl der Basis (und damit Koordinaten).

Stichwort: Darstellungsunabhängigkeit.

3. Schritt: Skalarprodukt [Abbildung von (V, V) nach $\mathbb{R}$]

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_i y_i. \quad (1.2)$$

Ausgedrückt durch kanonische Koordinatenvektoren (Index $\mathcal{K}$ weggelassen):

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = X^T Y, \text{ wobei } X^T = (x_1 \ x_2 \ x_3) \in \mathbb{R}_{1 \times 3}.$$

Länge des Vektors $\vec{x}$ (kanonische Norm)

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2} = \sqrt{x_i^2}. \quad (1.3)$$

Mathematik:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

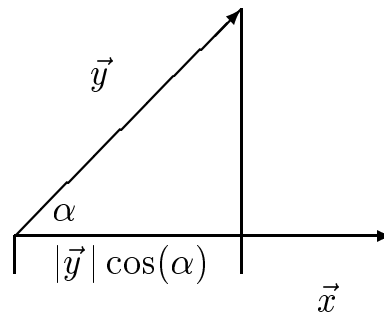
$p = 2$: Euklidische Norm.

Zwei von Null verschiedene Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen orthogonal, wenn

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Definition des Winkels α zwischen $\vec{x} \neq 0$ und $\vec{y} \neq 0$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}.$$



Projektion von $\vec{y}$ auf die Richtung von $\vec{x}$ (Beachte Vorzeichenwechsel für $\alpha > 90^\circ$):

$$\vec{y} \cdot \hat{x} = |\vec{y}| \cos(\alpha), \quad \hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Orthonormalbasis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$:

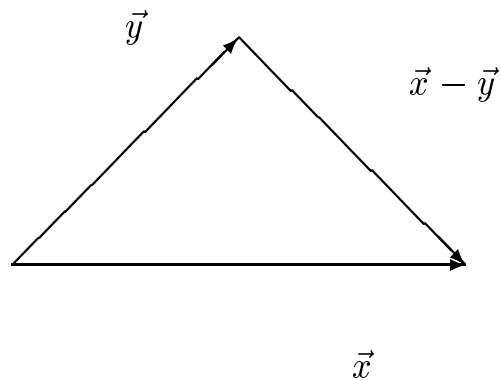
$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

mit dem Kronecker'schen Deltasymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \quad (\Rightarrow \text{Basisvektoren sind normiert}) \\ 0 & \text{für } i \neq j \quad (\Rightarrow \text{Basisvektoren sind orthogonal}) \end{cases}$$

4. Schritt: Kanonische Abstandsdefinition oder auch euklidische Metrik

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_i - y_i)^2}.$$



Für beliebige $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ gilt die Dreiecksungleichung

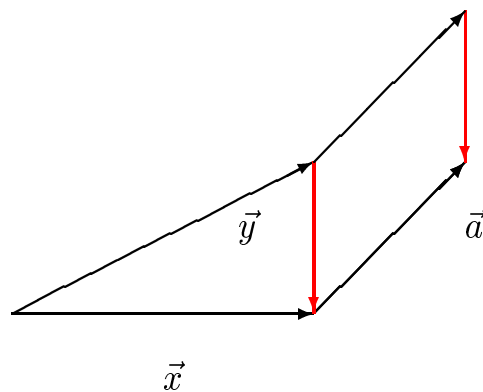
$$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}).$$

5. Transformationen, die den Abstand zweier Vektoren invariant lassen.

(a) **Translationen** T gekennzeichnet durch Verschiebungsvektor $\vec{a}$:

$$T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}. \quad (1.4)$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} + \vec{a} - \vec{y} - \vec{a}| = d(T_{\vec{a}}(\vec{x}), T_{\vec{a}}(\vec{y})).$$



Beachte: $T_{\vec{a}}$ ist keine lineare Abbildung, weil

$$T_{\vec{a}}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{x} + \vec{a} \neq \lambda(\vec{x} + \vec{a}) = \lambda T_{\vec{a}}(\vec{x}).$$

(b) **Drehspiegelungen** sind lineare Abbildungen, die das Skalarprodukt invariant lassen. Spezifiziere lin.

Abb. D durch Angabe der Wirkung auf die Basisvektoren:

$$D\hat{e}_i = D_{ji}\hat{e}_j. \quad (1.5)$$

D_{ji} sind die Entwicklungskoeffizienten des Bildes von $\hat{e}_i$ unter D nach den $\hat{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$). Damit gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \textcolor{red}{x'_j}\hat{e}_j \\ &:= D\vec{x} \\ &= Dx_i\hat{e}_i \\ &= x_iD\hat{e}_i \\ &= x_iD_{ji}\hat{e}_j \\ &= (\textcolor{red}{D_{ji}x_i})\hat{e}_j, \end{aligned}$$

d. h. für die Koordinaten des Bildvektors

$$x'_j = D_{ji}x_i. \quad (1.6)$$

Bemerkung: Bei linearen Abbildungen wird das Element, auf das die Abbildung wirkt, in der Regel nicht in Klammern geschrieben.

Aus der Forderung nach der Invarianz des Skalarprodukts folgt

$$\begin{aligned} x'_i y'_i &= D_{ij}x_j D_{ik}y_k \\ &= x_j \underbrace{D_{ji}^T D_{ik}}_{(D^T D)_{jk}} y_k \\ &\stackrel{!}{=} x_j \delta_{jk} y_k, \end{aligned}$$

d. h.

$$D^T D = \mathbb{1}. \quad (1.7)$$

D ist eine so genannte **orthogonale Transformation**. Wegen des Determinantenmultiplikations-

satzes $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ gilt

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{1}) &= 1 \\ &= \det(D^T D) \\ &= \underbrace{\det(D^T) \det(D)}_{\det(D)} \\ &= [\det(D)]^2. \quad \Rightarrow \det(D) = \pm 1.\end{aligned}$$

i. $\det(D)=1$: **Eigentliche Drehungen**.

Satz aus der linearen Algebra: Jede eigentliche Drehung lässt sich durch eine Drehachse $\hat{n}$ und einen Drehwinkel $0 \leq \varphi < 2\pi$ beschreiben, wobei

$$D\hat{n} = \hat{n}, \quad \text{Sp}(D) = 1 + 2\cos(\varphi).$$

Spur einer Matrix A : Summe der Diagonalelemente, d. h.

$$\text{Sp}(A) = \sum_{i=1}^3 A_{ii}.$$

ii. $\det(D) = -1$. Wir führen die **Paritätstransformation** ein:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jedes D' mit $\det(D') = -1$ lässt sich eindeutig als Produkt $D' = PD$ mit $\det(D) = +1$ schreiben.

iii. Gruppenstruktur

- A. Die orthogonalen Transformationen bilden die Gruppe $O(3)$.
- B. Die eigentlichen Drehungen bilden die Untergruppe $SO(3)$ (S für speziell, d. h. Determinante gleich 1).

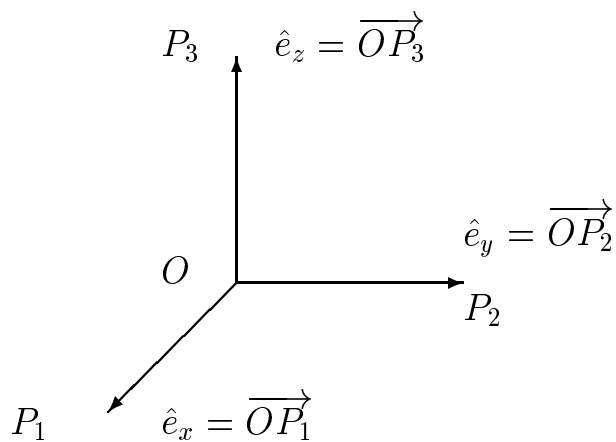
C. Die Menge $O(3) \setminus SO(3)$ bildet keine Untergruppe, da sie die Einheitsmatrix nicht enthält.

- (c) Wir kombinieren Translationen und Drehspiegelungen zur **euklidischen Bewegungsgruppe** in drei Dimensionen (Verallgemeinerung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ klar):

$$E(3) := \{A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{x}' = A(\vec{x}) = D\vec{x} + \vec{a} \text{ mit } D \in O(3) \text{ und } \vec{a} \in \mathbb{R}^3\}.$$

- (d) Später: Physikalische Konsequenzen, die sich aus Symmetrieforderungen mittels der Gruppe $E(3)$ ergeben.

- Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung:
Gegeben sei ein BS. Spezifiziere kartesisches Koordinatensystem durch Festlegung eines Ursprungs O und dreier fester Punkte P_1 , P_2 und P_3 , die zu einem rechtshändigen Dreibein $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ führen.



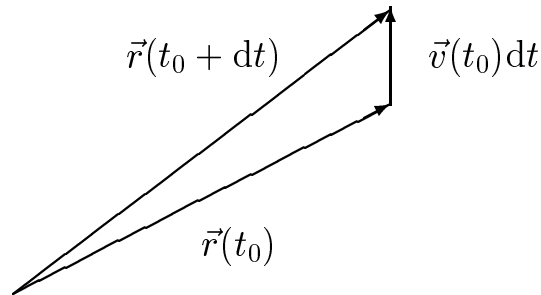
Bahnkurve $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z.$$

Wir fordern, dass x , y und z mindestens zweifach stetig differenzierbar sind.

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$



d. h.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z.$$

Geschwindigkeitsvektor ist Tangentialvektor an Bahnkurve.

Beschleunigung

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z.$$

1.2 Newton'sche Axiome

Axiomatische Einführung der Bewegungsgesetze als Zusammenfassung der Erfahrung (Experimente).

Axiom 1.2.1 (Newton I, auch Galileis Trägheitsgesetz): Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Im Folgenden: Körper $\rightarrow$ punktförmiger Körper, Massenpunkt, Teilchen. Ausdehnung auf zu betrachtender Längenskala vernachlässigbar.

Definition des mechanischen Impulses

$$\vec{p} := m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}. \quad (1.8)$$

Mathematische Formulierung von N1

$$\vec{p} = \text{konst. bei Abwesenheit von Kräften.} \quad (1.9)$$

Synonyme Bezeichnungen: 1. Newton'sches Bewegungsgesetz, Trägheitsgesetz, Satz von der Impulserhaltung.

Axiom 1.2.2 (Newton II): Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \quad (1.10)$$

($\vec{F}$ für lat. *foris* = Kraft). Aussage über Änderung des Impulses: Impulssatz.

Annahme: $m = \text{konst.} \Rightarrow$

$$m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (1.11)$$

Newton'sches Beschleunigungsgesetz: Masse mal Beschleunigung = Kraft.

Bemerkung: Gl. (1.11) stellt ein System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGLen) zweiter Ordnung dar. Mathematiker nennen es ein explizites System, weil es nach der höchsten (hier zweiten) Ableitung aufgelöst vorliegt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

oder in Komponenten

$$m\ddot{x} = F_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad \text{usw.}$$

Gesucht: Bahnkurve, die die Bewegungsgleichung (unter dem Einfluss der Kraft) löst. Eine eindeutige Lösung erfordert die Angabe von $2 \cdot 3 = 6$ Randbedingungen, etwa

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

oder

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$$

usw.

Besonders einfach: Kräftefreie Bewegung (bei konstanter Masse)

$$m\ddot{\vec{r}} = 0, \quad \vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0), \quad (1.12)$$

denn

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{b} = \vec{v}_0, \\ \ddot{\vec{r}} &= 0. \end{aligned}$$

Axiom 1.2.3 (Newton III: actio = reactio): Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Wirkung.

Kräfte treten in der Natur immer paarweise auf. Wir sprechen auch von Wechselwirkungen.

Definition: $\vec{F}_{ij}$ sei die Kraft, die Teilchen j auf Teilchen i ausübe:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (1.13)$$

Beachte: Die Kräfte $\vec{F}_{ij}$ und $\vec{F}_{ji}$ wirken auf verschiedene Teilchen.

Ergänzung 1.2.4 Kräfte addieren sich wie Vektoren (Unabhängigkeit der Kraftwirkungen voneinander, Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen).

Resultierende Kraft

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (1.14)$$

1.3 Einheiten

SI-Einheitensystem

Länge:	m
Zeit:	s
Masse:	kg
Kraft:	$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
Arbeit:	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$
Leistung	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$

Die Zeitmessung erfolgt über die Periodenzahl eines periodischen, kontinuierlichen Vorganges (Atomfrequenz, Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde berücksichtigt).

Sekundendefinition von 1967:

Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Meterdefinition von 1983:

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $(1/299\,792\,458)$ Sekunden durchläuft. Die Meterdefinition weist der Lichtgeschwindigkeit c einen festen Wert zu. Diese Fundamentalkonstante kann somit nicht mehr gemessen werden, sie ist jetzt exakt vorgegeben. Hieraus folgt, dass die Längeneinheit von der Zeiteinheit Sekunde abhängt.

Kilogrammdefinition von 1888/1889:

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

In Arbeit: Neudefinition mittels Naturkonstanten.

1.4 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

1.4.1 Inertialsystem

In welchen BS gelten die Newton'schen Gesetze?

Newton ging von einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit aus:

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.

Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.

Was ist daran verwunderlich?

Im ersten Axiom werden „Zustand der Ruhe“ und „der gleichförmigen Bewegung“ gleichgeordnet.

F: Wie kann man einen „unbeweglichen“ absoluten Raum von einem dagegen gleichförmig bewegten Raum unterscheiden?

A: Gar nicht!

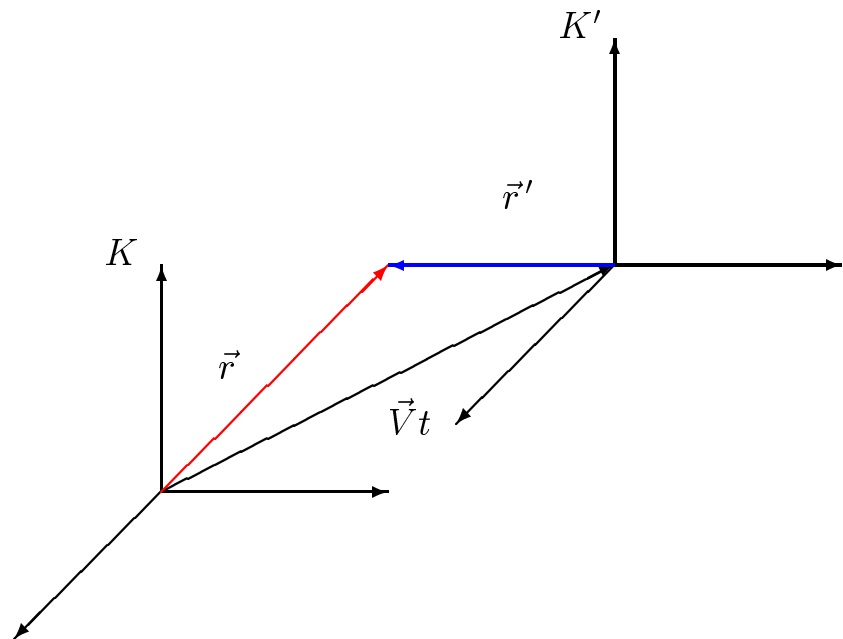
- N1 führt Intertialsysteme (IS) als bevorzugte BS ein.
 - IS sind solche BS, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen, oder die sich relativ zu den Fixsternen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
 - Mach-Prinzip: Die Massenverteilung im Universum bestimmt die Intertialsysteme.
- N2 ist ausdrücklich auf IS beschränkt. In BS', das selbst beschleunigt ist, wird Grundgleichung komplizierter:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \text{resultierende Kraft} + \text{Scheinkräfte}.$$

Scheinkräfte sind abhängig vom Beschleunigungszustand des BS. Stichwort: Zentrifugal- und Corioliskräfte.

1.4.2 Galilei-Transformation

Die spezielle Galilei-Transformation vermittelt zwischen IS K und K' , wobei K' sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V}$ relativ zu K bewegt, und beide KS für $t = 0$ übereinstimmen:



$$\vec{r} = \underbrace{\vec{V}t + \vec{r}'}_{\text{anschaulich}} = \vec{r}' + \vec{V}t,$$

$$t = t'.$$

Galilei'sches Relativitätsprinzip: Die Bewegungsgleichungen der Mechanik müssen bzgl. dieser Transformationen invariant sein.

Allgemeinste Transformation g , die von einem Inertialsystem IS in ein weiteres IS' abbildet (Vorzeichen sind Konventi-

onsfrage):

$$\begin{aligned}\vec{r} &\mapsto \vec{r}' = D\vec{r} - \vec{V}t - \vec{a}, \\ t &\mapsto t' = \lambda t - b,\end{aligned}\tag{1.15}$$

mit $D \in O(3)$, $\lambda = \pm 1$. **Galilei-Gruppe**.

1.5 Arbeit, Leistung, kinetische und potenzielle Energie

1.5.1 Vorbemerkung: Wegintegral

Es sei

- (a) $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbarer Weg (oder die Summe von stückweise stetig differenzierbaren Wegen), d. h. α_i , $i = 1, 2, 3$, ist stetig differenzierbar und
- (b) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.

Unter dem Wegintegral von $\vec{F}$ längs $\vec{\alpha}$ verstehen wir

$$\underbrace{\int_{\vec{\alpha}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} dt.$$

In der Physik häufig $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Sehr einfaches zweidimensionales Beispiel:

$$\vec{F}(x, y) = (x, y).$$

Gesucht: Wegintegral von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ entlang Gerade.

Wähle $I = [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) &= (t, t), \quad \vec{\alpha}(0) = (0, 0), \quad \vec{\alpha}(1) = (1, 1), \\ \dot{\vec{\alpha}}(t) &= (1, 1), \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (t \cdot 1 + t \cdot 1) dt = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Aber auch

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) &= (t^2, t^2), \quad \vec{\alpha}(0) = (0, 0), \quad \vec{\alpha}(1) = (1, 1), \\ \dot{\vec{\alpha}}(t) &= (2t, 2t), \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (t^2 \cdot 2t + t^2 \cdot 2t) dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 4 \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = 1,\end{aligned}$$

d. h. wir haben die Freiheit eine geschickte Parametrisierung für den Weg zu wählen.

1.5.2 Arbeit

Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft $\vec{F}$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$.

Arbeit, die die Kraft am Teilchen leistet (Schlagwort: Arbeit = Kraft mal Weg)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.16)$$

Betrachte einen endlichen Weg (Kurve) C , der die Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ verbindet:

$$\vec{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2.$$

Längs des Weges C geleistete **Arbeit** (W für *work*, A für Arbeit)

$$W_{12} = \int_C dW = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt. \quad (1.17)$$

1.5.3 Leistung

Leistung (P für *power*)

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (1.18)$$

1.5.4 Kinetische Energie

Kinetische Energie (mit Bewegung verbundene Energie)

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2. \quad (1.19)$$

Multipliziere N2 für konstantes m als Skalarprodukt mit Geschwindigkeit:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = P.$$

Bilde Integral $\int_{t_1}^{t_2} dt \dots$.

$\Rightarrow$ Die geleistete Arbeit führt zu einer Änderung der kinetischen Energie

$$T_2 - T_1 = W_{12}.$$

1.5.5 Konservative Kraft I

Teile Gesamtkraft in konservative und dissipative Kräfte auf (Motivation erfolgt gleich):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}.$$

Beachte: Im Allg. $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ (deshalb auch Begriff *Kraftfeld*). Eine Kraft heißt konservativ, wenn für sie gilt

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r})}{dt}.$$

1.5.6 Potenzielle Energie und Energieerhaltung

Sprechweise: Die konservative Kraft $\vec{F}_{\text{kons}}$ besitzt das Potenzial oder die potenzielle Energie U .

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= (\vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= -\frac{dU}{dt} + \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) \right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Für konservative Kräfte, d. h. $\vec{F}_{\text{diss}} = 0$, gilt der **Energiesatz**

$$T(\dot{\vec{r}}) + U(\vec{r}) = E = \text{konst.} \quad (1.20)$$

Bezeichnung *konservativ* im Sinne von Energie *erhaltend*.

Dissipative Kräfte: Umwandlung von mechanischer Energie in andere Energieformen:

- Wärme (Reibung),
- Zeitabhängige Kräfte (Austausch von Energie mit Umgebung).

1.5.7 Konservativer Kraft II

Welche Form hat eine konservative Kraft?

Betrachte

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r})}{dt} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Skalare Funktion U mit dem Gradienten

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \vec{\nabla}U$$

ausgedrückt durch den Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Damit gilt

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(t, \vec{r}),$$

da $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0$.

Beispiel für zweiten Term: Kraft auf Teilchen mit Ladung q im Magnetfeld $\vec{B}(t, \vec{r})$:

$$\frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{B},$$

c : Lichtgeschwindigkeit.

Wir beschränken uns nun (wie fast alle Bücher) auf

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}).$$

- Differentiationskriterium (Mathematik)

$\vec{F}(\vec{r})$ (auf offenem sternförmigen Gebiet) einmal stetig differenzierbar:

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (\vec{F} \text{ wirbelfrei}). \quad (1.21)$$

Begründung „ $\Rightarrow$ “:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F})_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \\ &= - \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{antisymm. bzgl. } j \leftrightarrow k} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{symm. bzgl. } j \leftrightarrow k} = 0. \end{aligned}$$

Beispiel $i = 1$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1jk} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} &= \epsilon_{123} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_2} \\ &= +1 \cdots + (-1) \cdots \\ &= (1 - 1) \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} \end{aligned}$$

wegen Satz von Schwarz (Reihenfolge der partiellen Ableitungen darf laut Voraussetzung vertauscht werden).

- Integrationskriterium (Mathematik)

$\vec{F}$ ist Gradientenfeld genau dann, wenn

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

wegunabhängig ist.

Für $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ folgt mit dem Satz von Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_0 \cdot d\vec{f} = 0,$$

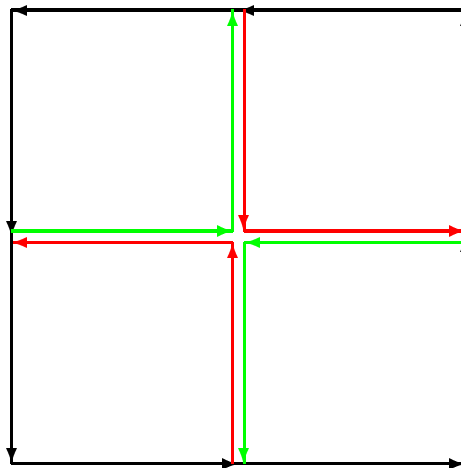
oder für jeden Weg zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist die geleistete Arbeit dieselbe.

Insbesondere

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (1.22)$$

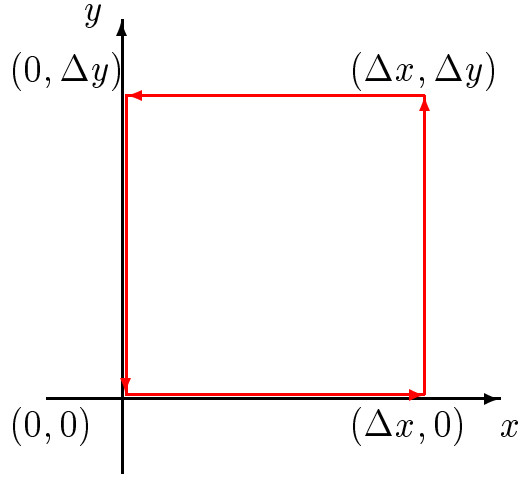
1.5.8 Motivation für Satz von Stokes

Unterteile die von C eingeschlossene Fläche in unendlich viele infinitesimal kleine Quadrate:



Die Beiträge der rot-grünen Paare heben sich gerade gegenseitig weg.

Betrachte nun Elementarquadrat (setze $z = 0$ und unterdrücke zugehöriges Argument in $\vec{F}$).



$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_0^{\Delta x} F_x(x, 0) dx + \int_0^{\Delta y} F_y(\Delta x, y) dy \\
&\quad + \int_{\Delta x}^0 F_x(x, \Delta y) dx + \int_{\Delta y}^0 F_y(0, y) dy \\
&= \int_0^{\Delta x} \left[F_x(x, 0) - \underbrace{F_x(x, \Delta y)}_{F_x(x, 0) + \Delta y \frac{\partial F_x(x, 0)}{\partial y} + \mathcal{O}(\Delta y^2)} \right] dx \\
&\quad + \int_0^{\Delta y} \left[\underbrace{F_y(\Delta x, y)}_{F_y(0, y) + \Delta x \frac{\partial F_y(0, y)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)} - F_y(0, y) \right] dy \\
&= -\Delta y \int_0^{\Delta x} \underbrace{\frac{\partial F_x(x, 0)}{\partial y}}_{\frac{\partial F_x(0, 0)}{\partial y} + \mathcal{O}(x)} dx \\
&\quad + \Delta x \int_0^{\Delta y} \frac{\partial F_y(0, y)}{\partial x} dy + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= -\Delta y \Delta x \frac{\partial F_x(0, 0)}{\partial y} + \Delta x \Delta y \frac{\partial F_y(0, 0)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= \Delta x \Delta y \hat{e}_z \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(0, 0) + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{f}.
\end{aligned}$$

1.5.9 Konservative Kraft III: Beispiel

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -Cx \\ -Cy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C > 0.$$

$\vec{F}$ ist konservativ, denn

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \hat{e}_k \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{e}_x \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (-Cy) \right]}_0 \\ &\quad + \hat{e}_y \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z} (-Cx) - \frac{\partial}{\partial x} 0 \right]}_0 \\ &\quad + \hat{e}_z \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} (-Cy) - \frac{\partial}{\partial y} (-Cx) \right]}_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmung des Potenzials. Es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}).$$

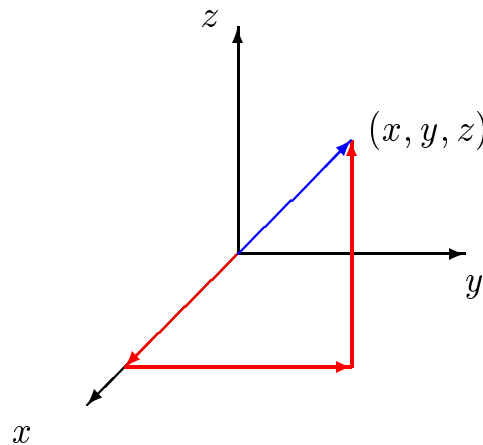
$$\begin{aligned} -Cx = F_x(\vec{r}) &= -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \Rightarrow U(\vec{r}) = \frac{C}{2}x^2 + V(y, z), \\ -Cy = F_y(\vec{r}) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C}{2}x^2 + V(y, z) \right], \\ &\Rightarrow U(\vec{r}) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2 + W(z), \\ 0 = F_z(\vec{r}) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2 + W(z) \right], \\ &\Rightarrow U(\vec{r}) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2 + \text{konst.} \end{aligned}$$

Geben wir z. B. $U(0, 0, 0) = 0$ vor, dann gilt

$$U(\vec{r}) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2.$$

Bemerkung: Potenzial eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators.

Völlig äquivalent:

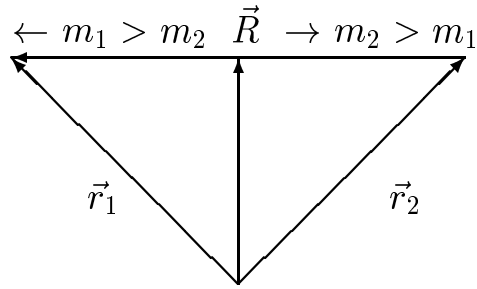


$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= U(0, 0, 0) - \int_0^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= U(0, 0, 0) - \int_0^x F_x(x', 0, 0) dx' \\ &\quad - \int_0^y F_y(x, y', 0) dy' - \int_0^z F_z(x, y, z') dz' \\ &= U(0, 0, 0) - \int_0^x (-Cx') dx' \\ &\quad - \int_0^y (-Cy') dy' - \int_0^z 0 dz' \\ &= U(0, 0, 0) + \frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2. \end{aligned}$$

1.6 Das Zweikörperproblem

Betrachte zwei Teilchen 1 und 2, zwischen denen eine Kraft wirkt.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Annahmen:

- Keine äußeren Kräfte.
- $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (Translationsinvarianz).

Bewegungsgleichungen (N2)

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}, \quad (1.23)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \stackrel{\text{N3}}{=} -\vec{F}_{12}. \quad (1.24)$$

1.6.1 Schwerpunktkoordinaten und Gesamtimpulserhaltung

Betrachte Summe

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0. \quad (1.25)$$

Führe **Schwerpunktkoordinaten** ein:

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad M = m_1 + m_2. \quad (1.26)$$

Eq. (1.25) $\Rightarrow$

$$M \ddot{\vec{R}} = 0,$$

d. h. der Gesamtimpuls ist erhalten:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{konst.} \quad (1.27)$$

Schwerpunkt bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig [siehe Gl. (1.12)].

1.6.2 Relativkoordinaten

Relativkoordinaten

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (1.28)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad (1.29)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (1.30)$$

Betrachte [Gl. (1.23)/ m_1 – Gl. (1.24)/ m_2]:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{\frac{1}{\mu}} \vec{F}(\vec{r})$$

mit der **reduzierten Masse**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}.$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung für Relativbewegung sieht aus wie N2 für ein Teilchen mit der Masse μ :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Übung 3: Relativimpuls, kinetische Energie.

1.6.3 Spezialfälle und Anwendungen

Wichtige Spezialfälle

- Gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$:

$$M = 2m, \quad \mu = \frac{m}{2}.$$

- Extremer Massenunterschied $m_1 \ll m_2 \rightarrow \infty$:

$$M = m_2, \quad \mu = m_1.$$

Anwendungsmöglichkeiten

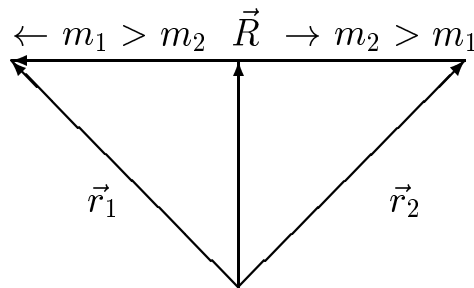
- Kepler-Problem

- Wasserstoffatom
- Rutherford-Streuung (Streuung im Coulomb-Feld)
- Zweiatomiges Molekül (Vibrationen, Rotationen)
- Quarkmodell für Mesonen (Quark-Antiquarkpaar)

1.7 Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Kepler-Problem)

1.7.1 Bewegungsgleichungen

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Es sei $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und $r = |\vec{r}|$:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.31)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.32)$$

mit der Gravitationskonstante

$$G = (6,6742 \pm 0,0010) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad (1.33)$$

Bewegungsgleichungen für Schwerpunktkoordinaten:

$$M \ddot{\vec{R}} = 0. \quad (1.34)$$

Schwerpunkt bewegt sich kräftefrei [siehe Gl. (1.12)]:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0(t - t_0),$$

d. h. drei von 6 Bewegungsgleichungen sind gelöst.
Bewegungsgleichungen für Relativkoordinaten:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \underbrace{-G \frac{m_1 m_2}{r^2}}_{f(r)} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.35)$$

Die Gravitationskraft ist eine so genannte Zentralkraft, d. h. eine Kraft, die auf den Ursprung zu oder von ihm weg gerichtet ist.

1.7.2 Zentralpotenzial

Für Zentralkräfte lässt sich immer ein (Zentral-) Potenzial angeben:

$$U(r) = U(r_0) - \int_{r_0}^r f(r') dr', \quad (1.36)$$

denn

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} U(r) &= \frac{dU(r)}{dr} \vec{\nabla} r \\ &= -f(r) \vec{\nabla} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \text{etc.}$$

1.7.3 Relativdrehimpuls und Flächensatz

Wir definieren den Relativdrehimpuls

$$\vec{l} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1.37)$$

Behauptung: Für Zentralkräfte ist $\vec{l}$ eine Erhaltungsgröße, d. h. zeitlich konstant.

Begründung:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \mu \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \underbrace{\vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}}}_{\sim \vec{r}} = 0.$$

Die Bewegung verläuft in einer Ebene senkrecht zu festem $\vec{l}$, da sowohl $\vec{r}$ als auch $\dot{\vec{r}}$ senkrecht zu $\vec{l}$ stehen (Kreuzprodukt).

Wähle Koordinatensystem mit

$$\vec{l} = l_z \hat{e}_z = l \hat{e}_z$$

und beschreibe Bewegung in der Ebene durch Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi) &\Rightarrow &\dot{x} = \dot{\rho} \cos(\phi) - \rho \dot{\phi} \sin(\phi), \\ y &= \rho \sin(\phi) &\Rightarrow &\dot{y} = \dot{\rho} \sin(\phi) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi), \\ z &= \dot{z} = 0. \end{aligned}$$

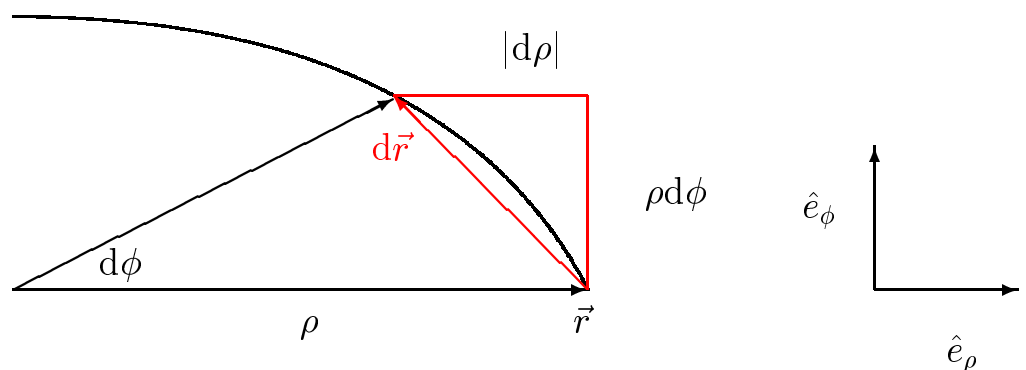
Beachte: Eine weitere Bewegungsgleichung ist gelöst.

Übung 2

$$\begin{aligned} l_z &= \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= \mu\rho\{\cos(\phi)[\dot{\rho}\sin(\phi) + \rho\dot{\phi}\cos(\phi)] - \sin(\phi)[\dot{\rho}\cos(\phi) - \rho\dot{\phi}\sin(\phi)]\} \\ &= \mu\rho^2\dot{\phi}[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] \\ &= \mu\rho^2\dot{\phi} \\ &=: l = \text{konst.} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Einfache geometrische Deutung

$$d\vec{r} = \hat{e}_\phi \rho d\phi + \hat{e}_\rho d\rho$$



Fläche des Dreiecks: $\frac{1}{2}$ Grundseite mal Höhe, d. h.

$$dF = \frac{1}{2} \rho \, \rho d\phi$$

ist die Fläche, die der Fahrstrahl $\vec{r}$ im Intervall dt überstreicht:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{konst.}$$

Zweites Kepler'sches Gesetz (1609), Flächensatz:

Der Radiusvektor (Fahrstrahl) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Bemerkung: Gilt für jede Zentralkraft, aber nur im Zweiteilchensystem.

1.7.4 Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Satz (ohne Beweis): Seien f und g stetig und $g(y_0) \neq 0$. Das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

besitzt genau eine Lösung, die sich durch Auflösen von

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^x f(x') dx'$$

nach y ergibt.

Spezialfall: $f(x) = 1$, d. h. $y' = g(y)$, wird durch

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{g(y')} = x - x_0 \tag{1.39}$$

gelöst.

1.7.5 Lösungsstrategie

Berechne

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\
 &= [\dot{\rho} \cos(\phi) - \rho \dot{\phi} \sin(\phi)]^2 + [\dot{\rho} \sin(\phi) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi)]^2 \\
 &= \dot{\rho}^2 \cos^2(\phi) - 2\dot{\rho}\rho\dot{\phi} \cos(\phi) \sin(\phi) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\phi) \\
 &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2(\phi) + 2\dot{\rho}\rho\dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\phi) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) \\
 &= \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2
 \end{aligned}$$

und setze zusammen mit Gl. (1.38) in Energiesatz (Kraft konservativ) ein:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r) &\stackrel{z=0}{=} \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + U(\rho) \\
 &= \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu\rho^2}}_{U_{\text{eff}}(\rho)} + U(\rho) \\
 &= E = \text{konst.}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Interpretation: Energiesatz für 1-dim. Bewegung im Kraftfeld mit einem effektiven Potenzial

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu\rho^2}}_{\text{Zentrifugalpotenzial}}.$$

Auflösen von (1.40) nach $\dot{\rho}$ liefert DGL:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}. \tag{1.41}$$

Positives (negatives) Vorzeichen für Bereiche, in denen Radialabstand zunimmt (abnimmt).

Wende nun DGL-Satz, Gl. (1.39), an:

$$dt = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}}.$$

Integration (im Allg. numerisch) liefert $t(\rho)$:

$$t = t_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(\rho')]}}, \quad t_0 = t(\rho_0).$$

Umkehrfunktion ergibt $\rho(t)$.

Aus Gl. (1.38) folgt DGL

$$\dot{\phi} = \frac{l}{\mu \rho^2}. \quad (1.42)$$

Vorgehensweise wie oben:

$$d\phi = \frac{l}{\mu \rho^2} dt.$$

Setze Lösung für $\rho(t)$ ein und integriere:

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t \frac{l}{\mu \rho^2(t')} dt'.$$

Alternativ

$$d\phi = \frac{l}{\mu \rho^2} dt = \pm \frac{l}{\mu} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}}.$$

Wende nun wieder DGL-Satz an:

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{l}{\mu} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(\rho')]}}, \quad (1.43)$$

Fazit für Relativbewegung:

1. Ursprünglich 3 DGLen 2. Ordnung für ρ , ϕ und z , d. h. 6 Integrationskonstanten.
2. $z(t) = 0$ mit zwei Integrationskonstanten festgelegt durch Richtung $\vec{l} \parallel \hat{e}_z$.
3. Zwei Integrationskonstanten festgelegt durch $l = \text{konst.}$ und $E = \text{konst.}$.
4. Zwei „freie“ Integrationskonstanten ρ_0 und ϕ_0 .

1.7.6 Qualitative Diskussion

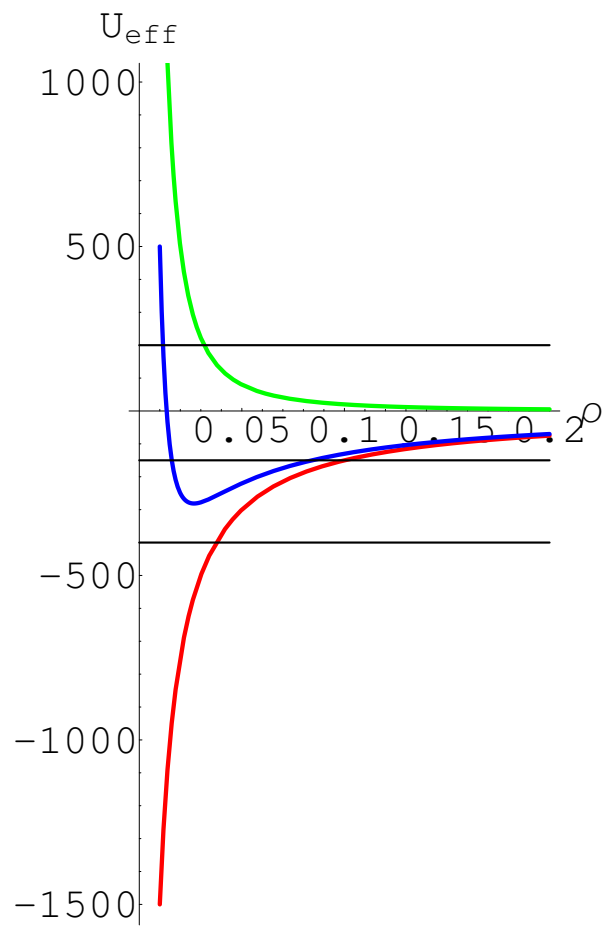
Energiesatz

$$E = \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2}_{\text{wichtig: immer } \geq 0} + U_{\text{eff}}(\rho)$$

wichtig: immer ≥ 0

mit

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}.$$



$$U_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{15}{\rho} + \frac{0.2}{\rho^2}.$$

1. Minimum $U_{\text{eff},0}$ des effektiven Potentials aus

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\rho} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2U_{\text{eff}}}{d\rho^2} > 0.$$

2. $E < U_{\text{eff},0}$ verboten.

3. $E = U_{\text{eff},0}$:

Spezialfall Kreisbahn, finite oder gebundene Bewegung.

4. $E > U_{\text{eff},0}$:

Bestimmung von Umkehrpunkten über

$$U_{\text{eff}}(\rho_i) = E.$$

(a) Finite oder gebundene Bewegung: Z. B. zwischen ρ_1 und ρ_2 aus Figur.

(b) Infinite Bewegung oder Streuung: Teilchen nähern sich einander aus dem Unendlichen bis Umkehrpunkt ρ_3 aus Figur.

5. $\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\text{eff}}(\rho) = -U'_{\text{eff}}(\rho)\hat{e}_\rho$.

Zum Zentrum hin: attraktiv; vom Zentrum weg: repulsiv.

- $U'_{\text{eff}}(\rho) > 0$: Attraktives Potenzial.
- $U'_{\text{eff}}(\rho) < 0$: Repulsives Potenzial.

1.7.7 Explizite Lösung für das Kepler-Problem

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} \quad \text{mit} \quad \alpha = Gm_1m_2.$$

A. Spezialfall Kreisbahn

Gesucht ρ_0 , das U_{eff} minimiert:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{eff}}(\rho)}{d\rho} &\stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{d^2U_{\text{eff}}(\rho)}{d\rho^2} &\stackrel{!}{>} 0. \end{aligned}$$

Lösung (**Übung 3**):

$$\rho_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}, \quad E_0 = U_{\text{eff},0} = U_{\text{eff}}(\rho_0) = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}. \quad (1.44)$$

B. Allgemeiner Fall

Verwende Gl. (1.43) mit positivem Vorzeichen (ρ läuft von kleineren zu größeren Werten):

$$\phi(\rho) = \phi_0 + \underbrace{\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{l \, d\rho'}{\rho'^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{\rho'} - \frac{l^2}{\rho'^2}}}}_I. \quad (1.45)$$

1. Substitution

$$u' = \frac{l}{\rho'}, \quad du' = -\frac{l}{\rho'^2} d\rho', \quad \Rightarrow$$

$$I = - \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha u'}{l} - u'^2}}.$$

2. Quadratische Ergänzung

$$A + Bu' - u'^2 = - \left(u' - \frac{B}{2} \right)^2 + A + \frac{B^2}{4}$$

mit

$$A = 2\mu E \quad \text{und} \quad B = \frac{2\mu\alpha}{l}.$$

3. Substitution

$$v' = u' - \frac{B}{2}, \quad dv' = du', \quad \Rightarrow$$

$$I = - \int_{v_0}^v \frac{dv'}{\sqrt{a^2 - v'^2}} \quad \text{mit} \quad a^2 = A + \frac{B^2}{4}.$$

4. Bronstein 164.

$$I = - \arcsin \left(\frac{v'}{a} \right) \Big|_{v_0}^v.$$

5. (Bronstein 2.5.2.1.7.)

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x), \quad \Rightarrow$$

$$I = \arccos\left(\frac{v}{a}\right) - \arccos\left(\frac{v_0}{a}\right).$$

6. Rückwärts einsetzen

$$\frac{v}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 \alpha^2}{l^2}}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{\mu \alpha}{l} \right) = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right)$$

mit

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{und} \quad p = \frac{l^2}{\mu\alpha}.$$

7. Für Gl. (1.45) erhalten wir

$$\phi = \phi_0 - \arccos\left(\frac{v_0}{a}\right) + \arccos\left(\frac{v}{a}\right)$$

Wähle Bezugsrichtung für Winkel ϕ so, dass

$$\phi_0 - \arccos\left(\frac{v_0}{a}\right) = 0$$

und damit

$$\cos(\phi) = \frac{v}{a} = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right)$$

oder

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e \cos(\phi). \quad (1.46)$$

C. Diskussion

Beachte Gl. (1.44)

$$\text{Bahnparameter: } p = \frac{l^2}{\mu\alpha} = \rho_0, \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \text{Exzentrizität: } e &= \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Gl. (1.46) beschreibt Kegelschnitte:

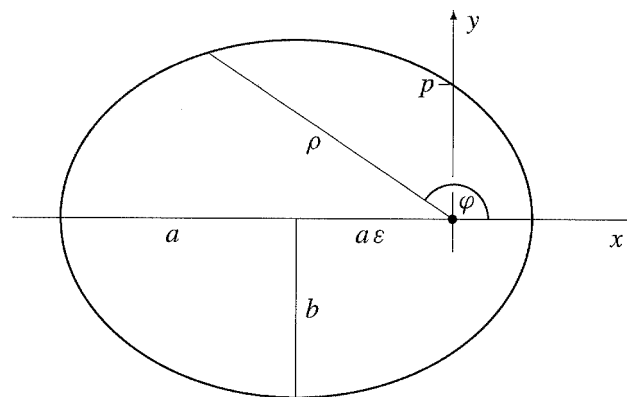
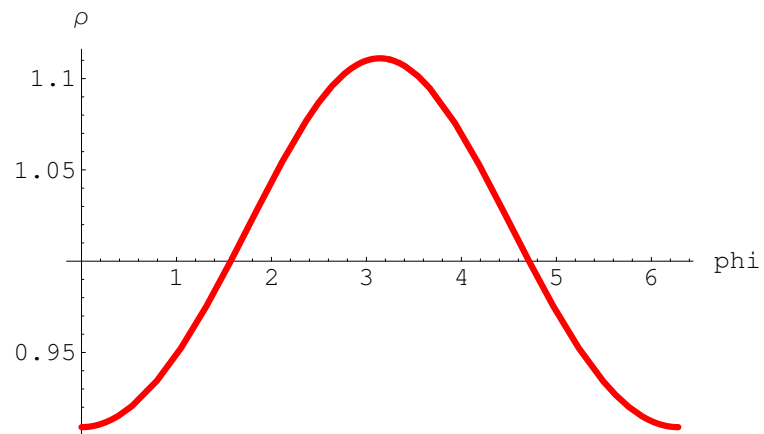
- (a) $E > 0$: $e > 1$, d. h. Hyperbel
- (b) $E = 0$: $e = 1$, d. h. Parabel
- (c) $E_0 < E < 0$: $0 < e < 1$, d. h. Ellipse
- (d) $E = E_0$: $e = 0$, d. h. Kreisbahn

1. Kepler'sches Gesetz: Der Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

(Ausführliche) Diskussion für Fall (c):

$$\rho(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}.$$

- Beispiel $p = 1$ und $e = 0.1$:



- Spezielle Werte

ϕ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\rho(\phi)$	$\frac{p}{1+e}$	p	$\frac{p}{1-e}$	p

Kleinsten Abstand (Perihel der Bahn):

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e},$$

größten Abstand (Aphel):

$$\rho_{\max} = \frac{p}{1-e}.$$

- Länge der Halbachsen

Übung:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) \\ &= \frac{p}{1-e^2} \\ &= \dots \\ &= -\frac{\alpha}{2E} \quad \text{mit } E_0 < E < 0, \end{aligned}$$

d. h. Länge der großen Halbachse hängt nur von E ab.

$$\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{a} \\ \Rightarrow b &= \sqrt{ap} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \dots = \frac{l}{\sqrt{2\mu(-E)}}. \end{aligned}$$

- Spezialfall Kreisbahn

$$a = b = \frac{\alpha}{2(-E)} \stackrel{!}{=} \frac{l}{\sqrt{2\mu(-E)}}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{4(-E)^2} &= \frac{l^2}{2\mu(-E)} \quad \Leftrightarrow \\ \mu\alpha^2 &= 2l^2(-E) \quad \Leftrightarrow \\ -E &= \frac{\mu\alpha^2}{2l^2}, \end{aligned}$$

konsistent mit Gl. (1.44).

- Berechnung der Periodendauer T

$$\begin{aligned}
 \text{Kepler II: } \frac{dF}{dt} &= \frac{l}{2\mu}, \\
 F &= \int_0^T \frac{dF}{dt} dt \\
 &= \frac{l}{2\mu} T \\
 &= \pi ab \quad (\text{Fläche einer Ellipse}) \\
 &= \pi \sqrt{p} a^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

3. Kepler'sches Gesetz (1615): Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Explizit

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\mu}{l} \pi \left(-\frac{\alpha}{2E} \right) \frac{l}{\sqrt{2\mu(-E)}} \\
 &= \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2(-E)^3}}.
 \end{aligned}$$

Kurze Diskussion für (a)

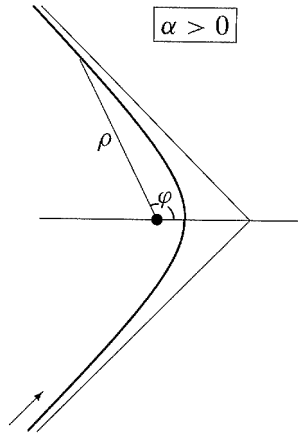
- Hyperbel für $E > 0$ mit $e > 1$, wobei $p > 0$ für $\alpha > 0$ (Gravitation).

Bestimmung der Richtung der Asymptoten:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{p}{1 + e \cos(\phi)} \rightarrow \infty, \\
 1 + e \cos(\phi) &\rightarrow 0, \\
 \cos(\phi_\infty) &= -\frac{1}{e} < 1.
 \end{aligned}$$

Minimaler Abstand (wenn Nenner am Größten wird, d. h. für $\phi = 0$):

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + e}.$$



Hyperbel (attraktiv)

- Abstoßende Kraft (z. B. Bahn eines Alphateilchens im Coulombfeld eines Atomkerns). Hier gilt immer $E > 0$ und $e > 1$ mit $p < 0$, da $\alpha < 0$.

$$e \cos(\phi) = -1 - \frac{|p|}{\rho},$$

$$\cos(\phi) = \frac{1}{e} \underbrace{\left(-1 - \frac{|p|}{\rho}\right)}_{< 0} < 0,$$

d. h.

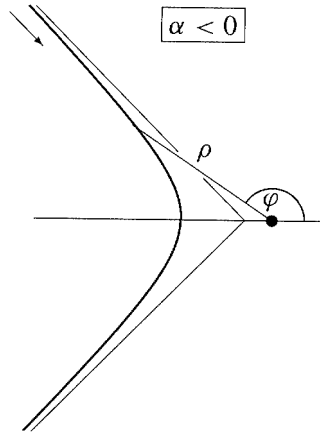
$$\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}.$$

Asymptoten aus

$$\cos(\phi_{1,2}) = -\frac{1}{e} \quad \text{mit} \quad -1 < -\frac{1}{e} < 0.$$

Minimaler Abstand für $\phi = \pi$:

$$\frac{|p|}{\rho_{\min}} = -1 - e \cos(\pi) = -1 + e > 0, \quad \Rightarrow \rho_{\min} = \frac{|p|}{e - 1}.$$



1.8 Systeme von endlich vielen Teilchen

Betrachte n Teilchen $\{m_1, \dots, m_n\}$ mit

1. inneren Zweikörperkräften [siehe Gl. (1.13)]

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad (i, j = 1, \dots, n, \text{ wobei } i \neq j);$$

plus zusätzliche Annahme: Zentralkräfte

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = F_{ij}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|,$$

2. äußeren Kräften $\vec{F}_i$, $i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow 3n$ Newton'sche Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.49)$$

Im Prinzip: $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$.

1.8.1 Schwerpunktsatz

Ortsvektor $\vec{R}$ des Schwerpunkts der Massenpunkte

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1.50)$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \text{Gesamtmasse des Systems.} \quad (1.51)$$

Bilde Summe der Gleichungen aus Gl. (1.49):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i &= M \ddot{\vec{R}} \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}} \end{aligned}$$

0, da Terme sich gegenseitig wegheben, z. B. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, etc.
 $= \vec{F}$.

Sauber:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} \quad (\text{Rearrangieren der Summe}) \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ji} \quad (\text{actio = reactio}) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \quad (\text{Umbenennen der Indizes}) \\ &= 0 \quad (x = -x = 0). \end{aligned}$$

-
1. Schwerpunktsatz: Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Masse in ihm vereinigt ist und als ob die Summe der äußeren Kräfte auf ihn wirkt.

2. Innere Kräfte sind ohne Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts.
3. Rechtfertigung für Idealisierung tatsächlicher Körper als Massenpunkte.
4. Für ein abgeschlossenes System, d. h. $\vec{F}_i = 0$, gilt der Impulssatz

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = \text{konst.}$$

und der Schwerpunktsatz

$$\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} = \vec{R}(0).$$

1.8.2 Drehimpulssatz

Die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte.

Definition für gesamten Drehimpuls:

$$\vec{L} := \sum_{i=1}^n m_i(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i. \quad (1.52)$$

Für festes i gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{l}_i &= m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i}_0 + m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij}(r_{ij}) \underbrace{\frac{\vec{r}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{r_{ij}}}_{-\frac{\vec{r}_i \times \vec{r}_j}{r_{ij}}}. \end{aligned}$$

Betrachte Summe über alle i : Beiträge von inneren Kräften heben sich wegen der Antisymmetrie des Kreuzproduktes weg.

$\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}}. \quad (1.53)$$

Für ein abgeschlossenes System gilt:

$$\vec{L} = \text{konst.} \quad (1.54)$$

1.8.3 Energiesatz

Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T + U) &= \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i, \\ T &= \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2, \\ U &= U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \\ &:= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n U_{ij}(r_{ij}),\end{aligned}$$

mit dem Potenzial U_{ij} der Zentralkraft $\vec{F}_{ij}$.

Beweis: Übung

Für ein abgeschlossenes System gilt:

$$E = T + U = \text{konst.} \quad (1.55)$$

1.8.4 Erhaltungsgrößen für abgeschlossene n -Teilchensysteme

Für ein abgeschlossenes n -Teilchensystem gibt es 10 Integrationskonstanten oder Erhaltungsgrößen:

$$\{\vec{R}(0), \vec{P}, \vec{L}, E\}.$$

Kein Zufall: Konsequenz des Noether-Theorems.

Zusammenhang: 10 Parameter der eigentlichen, orthochronen Galilei-Gruppe $\leftrightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen.

Kapitel 2

Prinzipien der kanonischen Mechanik

- Ziel: Mathematische Beschreibung, die sich in der Physik weit über die Mechanik hinaus als tragfähig erweist.

2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Zwangsbedingungen (ZB): Teilchen eines mechanischen Systems unterliegen gewissen Nebenbedingungen (geometrischer Art).

Betrachte n -Teilchensystem ($n \geq 1$).

1. Ohne ZB: $3n$ unabhängige Koordinaten, z. B. $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$.

Sprechweise: Das System besitzt $f = 3n$ Freiheitsgrade.

2. Unter holonomen („ganzgesetzlichen“) ZB versteht man unabhängige Gleichungen der Form

$$f_\lambda(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, r < 3n. \quad (2.1)$$

Explizit zeitabhängig: rheonom;
nicht explizit zeitabhängig: skleronom.

3. Anzahl der Freiheitsgrade: $f = 3n - r$.

4. Beispiel: Dreiteilchensystem mit starren Abständen a_i ,

$$f_1 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_1 = 0,$$

$$f_2 = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - a_2 = 0,$$

$$f_3 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_3 = 0.$$

$$f = 9 - 3 = 6.$$

5. Nichtholonome ZB: Z. B. Ungleichungen wie $\vec{r}_i^2 \leq R^2$
(Gasmoleküle in einer Glashohlkugel).

In dieser Vorlesung: Nur holonome ZB.

Zwangskräfte (ZK) sorgen für Einhaltung der Nebenbedingungen.

Generalisierte oder verallgemeinerte Koordinaten sind (geschickte) Koordinaten, die die ZB bereits berücksichtigen.

Gegeben: r holonome ZB, $f = 3n - r$:

$$\begin{aligned} \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n\} &\rightarrow \{q_1, \dots, q_f\}, \\ x_1 &= x_1(q_1, \dots, q_f, t), \\ &\vdots \\ z_n &= z_n(q_1, \dots, q_f, t). \end{aligned}$$

Hinweis: Wir erlauben eine explizite Zeitabhängigkeit, um bewegte Koordinatensysteme zuzulassen.

Beispiele

1. Teilchen auf einer Kugeloberfläche mit festem Radius $R > 0$:

$$\text{ZB: } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Übergang zu Kugelkoordinaten (an Geometrie des Problems angepasst):

$$\{x, y, z\} \rightarrow \{r, \theta, \phi\},$$

Zwangsbedingung: $r = R$,

Generalisierte Koordinaten: $\{q_1 = \theta, q_2 = \phi\}$,

$$x = R \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = R \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$z = R \cos(\theta).$$

2. Hantel mit fester Länge $a > 0$:

$$\text{ZB: } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - a^2 = 0.$$

5 Freiheitsgrade.

„Geschickte“ Wahl: Schwerpunkt $\vec{R}$ und 2 Winkel für Orientierung der Achse (berücksichtigt Symmetrie bzgl. Drehung um Hantelachse).

3. Starrer Körper mit mehr als 2 Massenpunkten (die nicht auf einer Achse liegen):

6 generalisierte Koordinaten: Schwerpunkt $\vec{R}$ plus 3 Winkel, die Orientierung im Raum festlegen.

Konfigurationsraum (KR): $\{(q_1, \dots, q_f)\}$.

Dynamisches System: Kurve im KR.

Ein Punkt im KR beschreibt einen möglichen Zustand (Konfiguration) des Systems.

Der KR ist nicht notwendigerweise ein Vektorraum.

Strategie

1. Bestimmung der Anzahl f der Freiheitsgrade.
2. Geschickte Wahl der generalisierten Koordinaten (Geometrie, Symmetrie).
3. Methode zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten.

2.2 D'Alembert'sches Prinzip

Gegeben: n Teilchen mit Massen $\{m_i\}$ und Koordinaten $\{\vec{r}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, mit r holonomen ZB

$$f_\lambda(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \lambda = 1, \dots, r.$$

2.2.1 Virtuelle Verrückungen und Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine **virtuelle Verrückung** $\{\delta \vec{r}_i\}$ des Systems = beliebige, infinitesimale Änderung der Koordinaten bei fester Zeit, die mit

den ZB verträglich ist.

Anzahl der unabhängigen Verrückungen = f .

Unterscheidung:

- Virtuelle Verrückung $\{\delta\vec{r}_i\}$ ist ein gedankliches Konstrukt, wird bei festgehaltenem t durchgeführt.
- Reelle Verrückung $\{d\vec{r}_i\}$ entsteht durch tatsächliche Bewegung im Zeitintervall dt .

Konzept von ZK: Simuliere Nebenbedingungen durch ZK $\vec{Z}_i$ auf Teilchen i , $i = 1, \dots, n$.

(Plausibles, nicht aus N1 - N3 ableitbares) Postulat für ZK:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.} \quad (2.2)$$

Prinzip der virtuellen Arbeit der Zwangskräfte, D'Alembert'sches Prinzip

Vorsicht: Da die n $\delta\vec{r}_i$ nicht unabhängig sind, gilt i. Allg. **nicht** $\vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$.

2.2.2 Statischer Fall

Statischer Fall oder Gleichgewicht := Gesamtkraft auf jedes einzelne Teilchen verschwindet:

$$\underbrace{\vec{F}_i}_{\text{Gesamtkraft}} = \underbrace{\vec{K}_i}_{\text{wirkliche, dynamische Kraft}} + \underbrace{\vec{Z}_i}_{\text{i. Allg. unbekannte ZK}} \quad (2.3)$$

$$= 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i &= 0 \quad \Rightarrow \\
\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \quad \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n (\vec{K}_i + \vec{Z}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i}_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit (PVA)

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.} \quad (2.5)$$

Beachte: $\delta \vec{r}_i$ mit ZB verträglich, i. Allg. nicht unabhängig. Deshalb: Summanden dürfen nicht einzeln Null gesetzt werden.

- Frage: Existiert eine Formulierung

$$\delta W = \sum_{j=1}^f \delta W_j = 0,$$

in der die einzelnen Summanden verschwinden?

Übergang zu unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Virtuelle Verrückungen

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Beachte: Da t fest, keine δt -Terme.

Einsetzen in Gl. (2.5) liefert

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Definition **verallgemeinerte Kräfte**:

$$Q_j := \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, f. \quad (2.8)$$

δq_j in Gl. (2.7) unabhängig $\Rightarrow$

$$Q_j = 0 \text{ im Gleichgewicht, } j = 1, \dots, f.$$

Spezialfall konservative Kräfte:

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^n (-\vec{\nabla}_i U) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, f, \quad (2.10)$$

mit

$$V(q_1, \dots, q_f) = U(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, z_n(q_1, \dots, q_f)) \quad (2.11)$$

oder symbolisch $V(q) = U(x(q))$.

Gleichgewichtsbedingung für konservative Kräfte

Potenzial $V(q_1, \dots, q_f)$ hat Extremum (Minimum für stabiles Gleichgewicht)

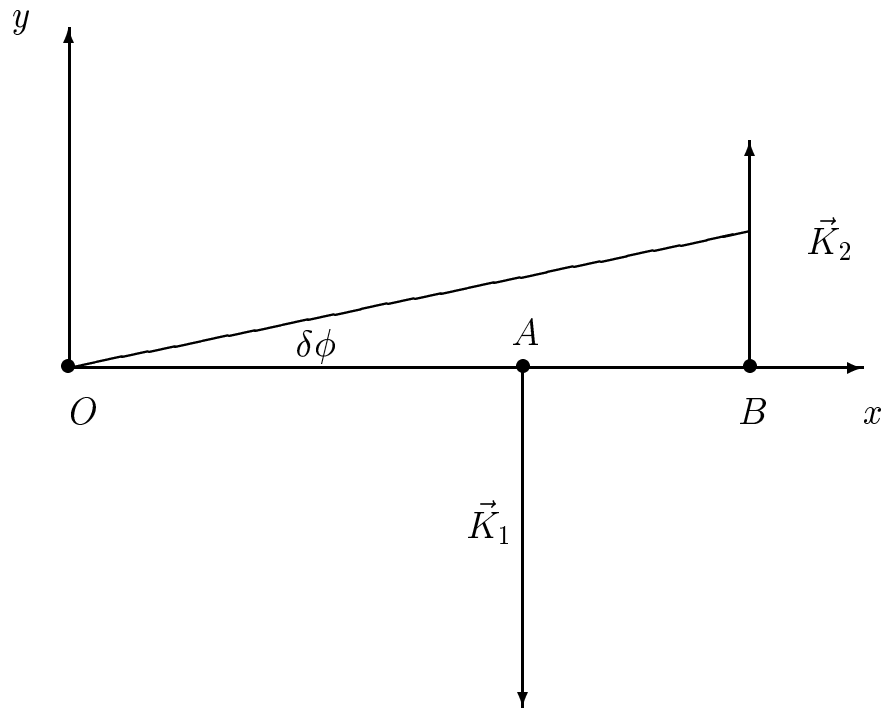
$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f,$$

$$\sum_{j,k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \chi_j \chi_k \geq 0 \quad \forall (\chi_1, \dots, \chi_f).$$

(Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.)

2.2.3 Beispiel für statischen Fall

Stab OB , der im Punkt O drehbar gelagert ist (Scharnier).



$$\begin{aligned}
 a &= \overline{OA}, \\
 b &= \overline{OB}, \\
 \vec{K}_1 &= -K_1 \hat{e}_y, \\
 \vec{K}_2 &= K_2 \hat{e}_y.
 \end{aligned}$$

3 ZB:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + y_1^2 - a^2 &= 0, \\
 x_2^2 + y_2^2 - b^2 &= 0, \\
 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (b - a)^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wie müssen K_1 und K_2 verknüpft sein, damit Stab sein Gleichgewicht in waagrechter Lage hat?

Wende PVA [Gl. (2.5)] an:

$$\begin{aligned}
 \vec{K}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{K}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= -K_1 \hat{e}_y \cdot \delta \vec{r}_1 + K_2 \hat{e}_y \cdot \delta \vec{r}_2 \\
 &= -K_1 \delta y_1(A) + K_2 \delta y_2(B) \\
 &\stackrel{!}{=} 0.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$K_2 = \frac{\delta y_1(A)}{\delta y_2(B)} K_1 = \frac{a}{b} K_1.$$

Mit Hilfe der verallgemeinerten Koordinate $q = \phi$:

$$\begin{aligned}x_1 &= a \cos(\phi), \\y_1 &= a \sin(\phi), \\x_2 &= b \cos(\phi), \\y_2 &= b \sin(\phi).\end{aligned}$$

PVA (für beliebiges ϕ):

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{K}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{K}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 \\&= -K_1 a \cos(\phi) \delta \phi + K_2 b \cos(\phi) \delta \phi \\&= \underbrace{[-K_1 a \cos(\phi) + K_2 b \cos(\phi)]}_{\text{verallg. Kraft } Q} \delta \phi \\&\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$K_2 = \frac{a}{b} K_1$$

überall, außer $\phi = 90^\circ$ und $\phi = 270^\circ$.

2.2.4 Dynamischer Fall

$$\begin{aligned}\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i &= 0 \quad \Rightarrow \\(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \quad \Rightarrow \\\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0.\end{aligned}$$

Postulat für ZK [siehe Gl. (2.2)]:

$$\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

$\Rightarrow$ **d'Alembert'sche Gleichungen**

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.} \quad (2.12)$$

Wie oben: Nur die Summe verschwindet, nicht notwendigerweise die einzelnen Summanden, da die $n \delta \vec{r}_i$ nicht unabhängig sind.

2.2.5 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art

Gegeben: r holonome ZB, $f = 3n - r$ generalisierte Koordinaten

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_r, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

- Gesucht: Bewegungsgleichungen für verallgemeinerte Koordinaten.

Einfaches zweidimensionales Beispiel für $\vec{r} = (x, y)$ mit

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi), \\ y &= \rho \sin(\phi). \end{aligned}$$

1 zeitabhängige holonome ZB:

$$x^2 + y^2 = R^2(t) \text{ mit } R(t) = R_0 + \dot{R}_0 t, \quad R_0 > 0, \quad \dot{R}_0 \text{ fest.}$$

$\Rightarrow f = 2 - 1 = 1$ generalisierte Koordinate $q = \phi$:

$$\begin{aligned} x &= x(\phi, t) = R(t) \cos(\phi) = (R_0 + \dot{R}_0 t) \cos(\phi), \\ y &= y(\phi, t) = R(t) \sin(\phi). \end{aligned}$$

Virtuelle Verrückungen (bei festem t)

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \delta x &= -R(t) \sin(\phi) \delta \phi, \\ \delta y &= R(t) \cos(\phi) \delta \phi. \end{aligned}$$

1. Summe in Gl. (2.12) wie oben:

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

mit den verallgemeinerten Kräften aus Gl. (2.8) (hier aber nicht im Gleichgewicht)

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, f.$$

Neu ist die 2. Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned}$$

Wir wollen eine Zeitableitung von $\ddot{\vec{r}}_i$ entfernen.

Verwende dazu $\dot{f}g = d(fg)/dt - f\dot{g}$:

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.14)$$

Berechne

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} (\dot{x}, \dot{y}) &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= \left(-R(t) \sin(\phi) \dot{\phi} + \dot{R}_0 \cos(\phi), R(t) \cos(\phi) \dot{\phi} + \dot{R}_0 \sin(\phi) \right). \end{aligned}$$

Beachte: $\dot{x}$ und $\dot{y}$ hängen von ϕ , $\dot{\phi}$ und t ab.

Wegen Gl. (2.15) gilt 1. Hilfsformel:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}. \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{\phi}} = (-R(t) \sin(\phi), R(t) \cos(\phi)) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}.$$

2. Hilfsformel:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}}. \quad (2.17)$$

Denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &\quad \left[\text{Beachte: } \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{q}_k = 0. \right] \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \vec{r}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{\vec{r}}_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) \\
&= \frac{d}{dt} (-R(t) \sin(\phi), R(t) \cos(\phi)) \\
&= \left(-\dot{R}_0 \sin(\phi) - R(t) \cos(\phi) \dot{\phi}, \dot{R}_0 \cos(\phi) - R(t) \sin(\phi) \dot{\phi} \right), \\
& \frac{\partial}{\partial \phi} (\dot{x}, \dot{y}) \\
&= \left(-R(t) \cos(\phi) \dot{\phi} - \dot{R}_0 \sin(\phi), -R(t) \sin(\phi) \dot{\phi} + \dot{R}_0 \cos(\phi) \right).
\end{aligned}$$

Verwende Gl. (2.16) im ersten Summanden von Gl. (2.14) und Gl. (2.17) im zweiten:

$$\dots = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Damit erhalten wir für die Summe

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right].$$

Der Ausdruck hat die Struktur

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \vec{v}^2$$

mit x gleich $\dot{q}$ oder q .

Endresultat für 2. Summe:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \\
& \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j.
\end{aligned}$$

Kombiniere nun beide Summen. Beachte, dass die f δq_j nun unabhängig sind, d. h. jeder einzelne Summand verschwindet.

Definiere

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2. \quad (2.18)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, f.} \quad (2.19)$$

Beachte: T muss auf Variablen q_j und $\dot{q}_j$ umgerechnet werden. Auch Gl. (2.19) werden als **d'Alembert'sche Gleichungen** bezeichnet.

- F: Enthält Gl. (2.19) als Spezialfall N2?
- A: Ja, denn:

Schalte ZB ab:

$$\begin{aligned} q_j &\rightarrow \vec{r}_i, \\ \dot{q}_j &\rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i, \\ Q_j &\rightarrow \vec{K}_i. \end{aligned}$$

Kinetische Energie aus Gl. (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} &= m_i \dot{\vec{r}}_i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} &= m_i \ddot{\vec{r}}_i, \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i} &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad \#$$

Annahme: $\vec{K}_i$ sind Potenzialkräfte

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i U.$$

Dann sind die verallgemeinerten Kräfte Q_j ableitbar aus einem Potenzial $V(q)$ [siehe Gl. (2.11)].

Definition: **Lagrange-Funktion**

$$\boxed{L(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}, t) - V(q, t).} \quad (2.20)$$

q und $\dot{q}$ stehen kollektiv für $(q_1, \dots, q_f)$ und $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$. Verwende nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T, \\ -\frac{\partial L}{\partial q_j} &= -\frac{\partial T}{\partial q_j} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_j}}_{-Q_j}. \end{aligned}$$

Addiere beide Gleichungen und verwende Gl. (2.19) $\Rightarrow$ **Lagrange'sche Gleichungen (der 2. Art):**

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f.} \quad (2.21)$$

Bemerkung: Die d'Alembert'schen Gleichungen (2.19) sind etwas allgemeiner, da sie nicht von Potenzialkräften ausgehen.

2.2.6 Beispiele: Lagrange-Funktion und -Gleichungen

Allgemeine Strategie

1. Analysiere Geometrie des Problems und identifiziere Zwangsbedingungen (Skizze).
2. Führe f geeignete generalisierte Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$ ein.
3. Formuliere Lagrange-Funktion

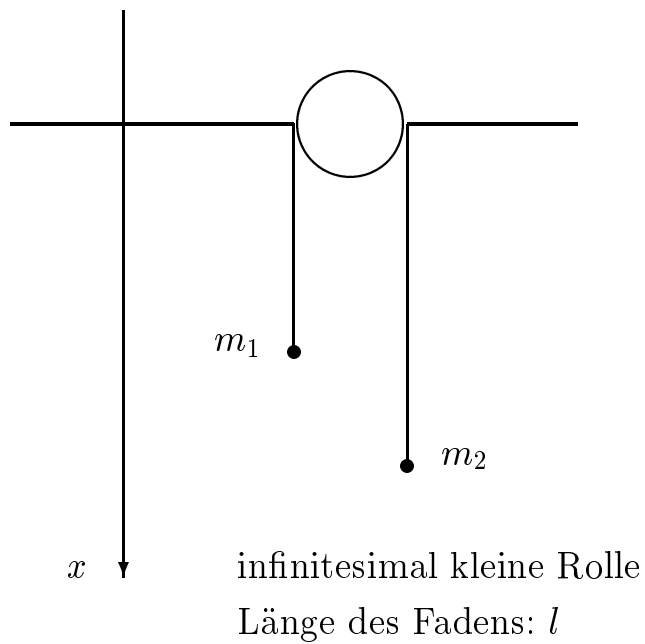
$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t).$$

4. Bestimme Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f.$$

5. Löse Bewegungsgleichungen (unter Umständen numerisch).

Atwood'sche Maschine



Dynamische Kräfte

$$\vec{K}_i = m_i g \hat{e}_x, \quad i = 1, 2.$$

Potenzial

$$U(x_1, x_2) = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \quad (+\text{konst.}).$$

ZB

$$x_1 + x_2 = l.$$

Generalisierte Koordinate

$$x = x_1.$$

Damit gilt

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = -\dot{x}_2.$$

Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2, \\ V &= -m_1 g x - m_2 g (l - x), \\ L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l - x). \end{aligned}$$

Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\dot{x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= m_1 g - m_2 g.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Insbesondere ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung:

$$m_1 = m_2.$$

Teilchen der Masse m auf einer Kugelschale im Schwerfeld

Dynamische Kraft

$$\vec{K} = (0, 0, -mg).$$

ZB

$$|\vec{r}| = R.$$

Generalisierte Koordinaten

$$\begin{aligned}q_1 &= \theta, \\ q_2 &= \phi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= R \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y &= R \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z &= R \cos(\theta).\end{aligned}$$

Wie lauten die verallgemeinerten Kräfte?

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (R \cos(\theta) \cos(\phi), R \cos(\theta) \sin(\phi), -R \sin(\theta)), \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-R \sin(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta) \cos(\phi), 0).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}Q_1 &= \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = mgR \sin(\theta), \\Q_2 &= \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0.\end{aligned}$$

Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$U(x, y, z) = mgz + mgR.$$

Willkürliche Konstante ist so gewählt, dass Potenzial am Boden der Kugelschale verschwindet.

$$V(\theta, \phi) = mgR (\cos(\theta) + 1).$$

Kinetische Energie (verwende Übung 2, Aufgabe 2. (a) mit $r = R$ und $\dot{r} = 0$)

$$T = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right).$$

Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right) - mgR (\cos(\theta) + 1).$$

Zwischenrechnungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 \dot{\theta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 \ddot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mR^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 + mgR \sin(\theta), \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen

$$mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 - mgR \sin(\theta) = 0$$

oder

$$\ddot{\theta} - \left(\cos(\theta) \dot{\phi}^2 + \frac{g}{R} \right) \sin(\theta) = 0.$$

Außerdem

$$\frac{d}{dt} \left(mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \right) = 0,$$

d. h.

$$mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} = \text{konst.}$$

Hierbei handelt es sich aber gerade um die z -Komponente des Drehimpulses (Nachrechnen!).

$$\begin{aligned} l_z &= (\vec{r} \times \vec{p})_z \\ &= m \epsilon_{3ij} r_i \dot{r}_j \\ &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= m \left(R \sin(\theta) \cos(\phi) R [\cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi}] \right. \\ &\quad \left. - R \sin(\theta) \sin(\phi) R [\cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi}] \right) \\ &= mR^2 [\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi)] \dot{\phi} \\ &= mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Diese ist also eine Erhaltungsgröße.

2.3 Funktionale, Variationsrechnung und Hamilton'sches Prinzip

Betrachte Gl. (2.5) (PVA) und Gl. (2.12) (d'Alembert'sche Gl.):

Stabilität gegen kleine Verrückungen der Positionen (im statischen Fall) bzw. der Bahnen (im dynamischen Fall) zeichnet den physikalisch realisierten Zustand aus.

Frage: Existiert ein Zusammenhang zwischen Stabilität und einem Extremalprinzip? Genauer: Lässt sich einem mechanischen System ein Funktional zuordnen dergestalt, dass die angenommene Bahn sich dadurch auszeichnet, dass sie das Funktional zum Extremum macht?

Antwort: Ja! Wirkung $S = \int L dt$.

Sensationell erfolgreiches Konzept mit weiteren Anwendungen in Feldtheorien, quantisierten und relativistischen Theorien.

- Motto: Keine Angst vor Funktionalen und Variationsrechnung!

2.3.1 Funktional

Es sei $\mathcal{F}$ ein Funktionenraum, z. B. die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Ein Funktional F ist eine Abbildung von $\mathcal{F}$ nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d. h.

(komplette) Funktion $f \mapsto$ reelle oder komplexe Zahl $F[f]$.

Typisches Beispiel: Integral der Form

$$F[f] = \int d^n x g(f(x))$$

mit g integrierbarer $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -Funktion.

1. Häufig werden die Argumente von Funktionalen in eckige Klammern geschrieben, um sie von normalen Funktionen zu unterscheiden.
2. Funktionale können auch von mehreren Funktionen abhängen: $F[f_1, \dots, f_k]$.

2.3.2 Variationsrechnung

Beispiel: Benzinverbrauch für eine Route von A nach B als Funktion der gewählten Strecke, der Geschwindigkeit und der (Tages-) Zeit. Aufgabe: Minimieren Sie den Benzinverbrauch mit der Randbedingung, dass Sie zur Zeit t_1 in A starten und zur Zeit t_2 in B ankommen wollen.

Typische Aufgabe der Variationsrechnung: Bestimmung von Extrema von Funktionalen.

Suggestives Beispiel (Aufgabe von Lagrange).

Gegeben sei

$$I[y] := \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad \text{mit} \quad y' = \frac{dy}{dx}. \quad (2.22)$$

Gesucht: Funktion y mit vorgegebenen $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$, für die I ein Extremum annimmt.

Frage: Angenommen eine solche Funktion existiert, welche Bedingung muss sie erfüllen?

Definiere Vergleichskurven

$$y_\epsilon(x) := y(x) + \epsilon h(x) \quad (2.23)$$

mit $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Es gilt

$$I[y_\epsilon] = J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \epsilon h, y' + \epsilon h', x) dx.$$

y ist Lösung, wenn die so genannte Variation verschwindet:

$$\delta I := J'(0) = 0. \quad (2.24)$$

Betrachte Taylor-Reihe in ϵ

$$J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(y, y', x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \epsilon h + \frac{\partial f}{\partial y'} \epsilon h' \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] dx.$$

Gl. (2.24) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} h'}_{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} h \right) - h \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}} \right) dx \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} h \Big|_{x_1}^{x_2}}_{0, \text{ da } h(x_1) = h(x_2) = 0} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h dx \end{aligned} \quad (2.25)$$

für beliebiges h , das obige Randbedingungen erfüllt.

Fundamentallemma der Variationsrechnung (Mathematik):

Wenn das Integral $\int_{x_1}^{x_2} h(x)g(x)dx$ gleich null ist für beliebige stetige Funktionen $h(x)$ mit stetiger Ableitung und $h(x_1) = h(x_2) = 0$, dann gilt $g(x) = 0$ in $[x_1, x_2]$.

Anwendung auf Gl. (2.25) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.} \quad (2.26)$$

Gl. (2.26) ist eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion y die Extremalaufgabe löst.

Grundsätzlich: Existenz der Lösung einer gegebenen Aufgabe in der Variationsrechnung bedarf noch eines besonderen Beweises.

2.3.3 Hamilton'sches Prinzip der minimalen Wirkung

Postulat: Gegeben sei ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden $q = (q_1, \dots, q_f)$ und Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$. Es sei $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_f(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, eine physikalische Bahnkurve mit $\varphi(t_1) = \varphi_1$ und $\varphi(t_2) = \varphi_2$.

Die Bahnkurve macht das **Wirkungsfunktional**

$$\boxed{S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt} \quad (2.27)$$

extremal.

2.4 Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichungen

Notwendige Voraussetzung für Extremalität von $S[q]$ sind die **Euler-Lagrange-Gleichungen**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f.} \quad (2.28)$$

Beweis wie in Abschnitt 2.3.2 mit den Ersetzungen:

$$\begin{aligned}
I &\rightarrow S, \\
y &\rightarrow q = (q_1, \dots, q_f), \\
y' &\rightarrow \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f), \\
x &\rightarrow t, \\
f &\rightarrow L, \\
y_\epsilon = y + \epsilon h &\rightarrow q_j + \epsilon_j h_j, \quad j = 1, \dots, f, \\
J(\epsilon) &\rightarrow J(\epsilon_1, \dots, \epsilon_f), \\
J'(0) = 0 &\rightarrow \frac{\partial J(0, \dots, 0)}{\partial \epsilon_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ Euler-Lagrange-Gleichungen aus Gl. (2.28).

f DGLen 2. Ordnung für die Koordinaten q .

Lösung wird durch $2f$ Anfangsbedingungen, z. B. $q(0)$ und $\dot{q}(0)$ festgelegt.

2.4.1 Beispiel Lorentz-Kraft

Auf ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem elektrischen und magnetischen Feld wirke die **Lorentz-Kraft**:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t).} \quad (2.29)$$

Vorgriff: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich mit Hilfe eines skalaren Potentials Φ und eines Vektorpotentials $\vec{A}$ ausdrücken,

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t), \\
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t).
\end{aligned}$$

Postulat: Die zu Gl. (2.29) gehörige Lagrange-Funktion lautet

$$\boxed{L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t).} \quad (2.30)$$

Begründung:

Schreibe $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Zwischenrechnungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m\ddot{x}_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_i = \underbrace{-\frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{qE_i} + \frac{q}{c} \underbrace{\left(\dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j \right)}_{(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i ?}.$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \dot{\vec{r}} \times \vec{B} &= \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \\ (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i &= \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k \\ &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_l} A_m \\ &= \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}. \quad \# \end{aligned}$$

Nebenrechnung zum Epsilontensor:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \\ &= \hat{e}_k \cdot \hat{e}_i \times \hat{e}_j \hat{e}_k \cdot \hat{e}_l \times \hat{e}_m.\end{aligned}$$

Beachte nun

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \hat{e}_k \cdot \vec{a} \hat{e}_k \cdot \vec{b}.$$

$$\begin{aligned}\dots &= \hat{e}_i \times \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l \times \hat{e}_m \\ \text{Lagrange'sche Identität} &= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_l \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m - \hat{e}_i \cdot \hat{e}_m \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.\end{aligned}$$

Beispiel konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0 \hat{e}_z$.

Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = 0, \dot{\vec{r}}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \frac{q}{m} E_0 \hat{e}_z \Rightarrow \\ \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= \frac{q}{m} E_0.\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \dot{x}_0 t, \\ y(t) &= y_0 + \dot{y}_0 t, \\ z(t) &= z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_0 t^2.\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen $\Rightarrow$

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_0 t^2.$$

2.4.2 Nicht-Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion

1. Multiplikation der Lagrange-Funktion mit einer beliebigen reellen Zahl ungleich null führt zu denselben Bewegungsgleichungen.
2. Die Lagrange-Funktion ist nur bis auf eine totale zeitliche Ableitung einer Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit festgelegt, d. h.

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (2.31)$$

liefert dieselben Euler-Lagrange-Gleichungen.

Begründung:

Betrachte Beitrag von $df(q, t)/dt$ zur Variation der Wirkung (zur Vereinfachung betrachten wir nur eine generalisierte Koordinate, Verallgemeinerung wie in Abschnitt 2.4):

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \underbrace{f(q + \epsilon h, t)}_{f(q, t) + \epsilon h \frac{\partial f}{\partial q}(q, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \cdots \right|_{\epsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(h \frac{\partial f}{\partial q}(q, t) \right) \\
&= \left. h \frac{\partial f}{\partial q}(q, t) \right|_{t_1}^{t_2} \\
&= 0, \quad \text{da} \quad h(t_1) = h(t_2) = 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Der Übergang von L nach L' in Gl. (2.31) heisst auch Eichtransformation an der Lagrange-Funktion.

2.4.3 Beispiel

Eine so genannte Eichtransformation der elektromagnetischen Potenziale

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{x}, t) &\mapsto \Phi'(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \\
\vec{A}(\vec{x}, t) &\mapsto \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{x}, t)
\end{aligned}$$

mittels einer stetig differenzierbaren reellwertigen Funktion χ lässt elektrisches und magnetisches Feld unverändert:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\
\vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' \\
&= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi}_0 \\
&= \vec{B}, \\
\vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\
\vec{E}' &= -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\
&= \underbrace{\vec{E} - \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \chi \\
&= \vec{E}.
\end{aligned}$$

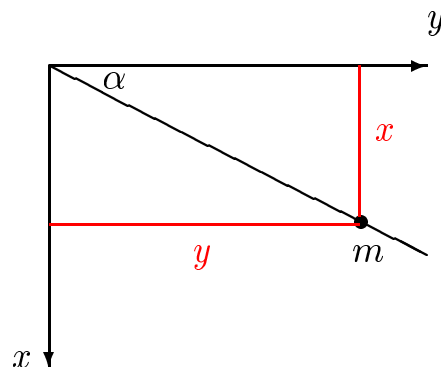
Damit gilt für die Lagrange-Funktion aus Gl. (2.30)

$$\begin{aligned} L'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi'(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) \\ &= L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \underbrace{\frac{q}{c} \left(\frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t) \right)}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{q}{c} \chi(\vec{r}, t) \right)}. \end{aligned}$$

2.4.4 Lagrange-Gleichungen mit Nebenbedingungen in Gleichungsform

Methode zur Berücksichtigung von Zwangsbedingungen, wenn diese so kompliziert sind, dass sich die überflüssigen Freiheitsgrade nicht explizit eliminieren lassen.

(Sehr) Einfaches Beispiel



Gesamtkraft = Dynamische Kraft + Zwangskraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{K} + \vec{Z}, \\ \vec{K} &= mg\hat{e}_x, \quad U = -mgx. \end{aligned}$$

Gesucht: Lösung der Bewegungsgleichungen für Anfangswerte

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Direkte Elimination

$$\begin{aligned}y &= \cot(\alpha)x, \\ \dot{y} &= \cot(\alpha)\dot{x}.\end{aligned}$$

Lagrange-Funktion für generalisierte Koordinate x

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \cot^2(\alpha)\dot{x}^2] + mgx = \frac{1}{2}m[1 + \cot^2(\alpha)]\dot{x}^2 + mgx.$$

Euler-Lagrange-Gleichung

$$m[1 + \cot^2(\alpha)]\ddot{x} - mg = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} = \frac{g}{1 + \cot^2(\alpha)} = \sin^2(\alpha)g.$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha)gt^2 + \dot{x}_0t + x_0.$$

Lösung für obige Anfangswerte

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha)gt^2.$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = \cot(\alpha)x(t) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)gt^2.$$

Bestimmung der Zwangskräfte

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= m\sin^2(\alpha)g = m[1 - \cos^2(\alpha)]g = K_x + Z_x, \\ \Rightarrow Z_x &= -\cos^2(\alpha)mg, \\ m\ddot{y} &= m\sin(\alpha)\cos(\alpha)g = Z_y.\end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators

Führe neue Lagrange-Funktion ein

$$\tilde{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgx + \lambda(t)[y - \cot(\alpha)x].$$

$\lambda(t)$: (zunächst unbekannter) Lagrange-Multiplikator.

Aufgabe: Bestimme x , y und λ so, dass Nebenbedingung und

Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt werden.
 Beachte: Unabhängige Variation in x und y .

Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - mg + \lambda \cot(\alpha) &= 0, \\ m\ddot{y} - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Integration ($\dot{y}(0) = 0 = y(0)$) liefert

$$\begin{aligned} m\dot{y}(t) &= \int_0^t dt' \lambda(t'), \\ my(t) &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \lambda(t''). \end{aligned}$$

Analog

$$mx(t) = \frac{1}{2}mgt^2 - \cot(\alpha) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \lambda(t'').$$

Neben- oder Zwangsbedingung:

$$m[y - \cot(\alpha)x] = 0.$$

Einsetzen

$$\underbrace{[1 + \cot^2(\alpha)]}_{\sin^{-2}(\alpha)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \lambda(t'') - \frac{1}{2} \cot(\alpha) mgt^2 = 0$$

oder

$$\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \lambda(t'') = \frac{1}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) mgt^2.$$

Zweimal bzgl. t differenzieren $\Rightarrow$

$$\lambda(t) = \sin(\alpha) \cos(\alpha) mg.$$

Der Rest wie oben.

Verallgemeinerung

Betrachte r Nebenbedingungen

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, r < 3n).$$

Arbeite mit der Lagrange-Funktion

$$\boxed{\tilde{L} = L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) + \sum_{k=1}^r \lambda_k(t) f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t).}$$

(2.32)

Dann weiter wie oben.

Auch andere Nebenbedingungen behandelbar:

1.

$$\int_{t_1}^{t_2} f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) dt = 0 \quad (k = 1, \dots, r < 3n),$$

$$\tilde{L} = L + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t).$$

2.

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, r < 3n),$$

$$\tilde{L} = L + \sum_{k=1}^r \lambda_k(t) f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t).$$

3. „Gemischte“ Fälle.

Physikalische Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren

Gegeben: n -Teilchensystem mit Nebenbedingung

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0.$$

Betrachte zunächst nur den statischen Fall:

$$L = -V, \quad \tilde{L} = -V + \lambda f.$$

Variation (unter dem Integral) führt auf

$$-\delta V + \lambda \delta f = 0$$

oder

$$\delta(-V + \lambda f) = 0.$$

Interpretiere $-\lambda f$ als potenzielle Energie der Zwangskräfte:

$$\begin{aligned} V_Z &= -\lambda f, \\ \vec{Z}_i &= -\vec{\nabla}_i V_Z \\ &= (\vec{\nabla}_i \lambda) \underbrace{f}_0 + \lambda \vec{\nabla}_i f \\ &= \lambda \vec{\nabla}_i f. \end{aligned}$$

Gilt nicht nur im Gleichgewicht sondern auch im dynamischen Fall.

Für obiges Beispiel:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) mg, \\ f &= [y - \cot(\alpha)x], \\ Z_x &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) mg [-\cot(\alpha)] = -\cos^2(\alpha) mg, \\ Z_y &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) mg. \end{aligned}$$

Lässt sich auch auf mehrere Nebenbedingungen verallgemeinern.

2.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Zitat aus dem Antrag für ein Graduiertenkolleg *Symmetriebrechung in fundamentalen Wechselwirkungen*

Das Wirken von Symmetrien in den Naturgesetzen ist eine der Schlüsselideen der modernen Physik und besitzt eine herausragende Bedeutung für das Verständnis der Struktur der Materie. Das Studium fundamentaler Symmetrien und ihrer Brechung bildet daher das Leitthema des beantragten Graduiertenkollegs.

2.5.1 Verallgemeinerter Impuls

Gegeben sei eine Lagrange-Funktion

$$L(\underbrace{q_1, \dots, q_f}_{\text{verallg. Koord.}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f}_{\text{verallg. Geschwindigkeit}}, t).$$

Definition des verallgemeinerten Impulses (zu q_j kanonisch konjugierten Impulses, oder einfach kanonischen Impulses):

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, f). \quad (2.33)$$

Beispiele:

1. Freies Teilchen

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2, \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j,$$

d. h. für ein freies Teilchen: Kanonischer Impuls = gewöhnlicher (oder kinematischer) Impuls.

2. Ebenes Pendel aus Übung 5, Aufgabe 2

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl[\cos(\phi) - 1], \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi}.$$

Zu ϕ kanonisch konjugierter Impuls = Drehimpuls.

3. Geladenes Teilchen in elektromagnetischem Potenzial

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t),$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = m \dot{r}_j + \frac{q}{c} A_j(\vec{r}, t) \neq m \dot{r}_j,$$

d. h. kanonischer Impuls $\neq$ kinematischer Impuls.

2.5.2 Zyklische Koordinate

Falls eine verallgemeinerte Koordinate q_j nicht explizit in der Lagrange-Funktion vorkommt (wohl aber die verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}_j$),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

nennt man diese Koordinate zyklisch. Der dazu konjugierte Impuls p_j ist für Lösungen der Bewegungsgleichung eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{d}{dt}p_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{konst.}$$

Beispiele

1. Freies Teilchen

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{konst.}$$

Impulserhaltung

2. Zweikörpersystem mit Zentralkraft

Lagrange-Funktion für Relativbewegung

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|).$$

Kugelkoordinaten

$$L = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right) - V(r).$$

$\Rightarrow \phi$ ist zyklische Koordinate,

$$p_\phi = \mu r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \quad \text{ist Erhaltungsgröße.}$$

$p_\phi = l_z$ ist z -Komponente des Relativdrehimpulses.

Beachte: Wegen der sphärischen Symmetrie des Problems ist jede Komponente des Relativdrehimpulses eine Erhaltungsgröße (siehe Abschnitt 1.7.3).

2.5.3 Noether-Theorem

Zusammenhang zwischen der Existenz von Erhaltungsgrößen und Symmetrien.

Symmetrien: Transformationen der dynamischen Variablen, die die Lagrange-Funktion invariant lassen.

Gegeben sei $L(q, \dot{q}, t)$. Betrachte (kontinuierliche) infinitesimale Transformationen

$$\boxed{q_j \mapsto q'_j = \Phi_j(q, \dot{q}, t, \epsilon) = q_j + \epsilon \Psi_j(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad j = 1, \dots, f.} \quad (2.34)$$

Endliche Transformationen lassen sich in Analogie zu

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

aufbauen. Insbesondere:

$$\Phi_j(q, \dot{q}, t, 0) = q_j.$$

Beispiel: Gegeben sei ein Teilchen mit kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) . Betrachte Drehung mit Drehwinkel ϵ um z -Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0 \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Verwende $\cos(\epsilon) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ und $\sin(\epsilon) = \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3)$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= -x_2, \\ \Psi_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= x_1, \\ \Psi_3(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= 0. \end{aligned}$$

Voraussetzung: L ist invariant unter den Transformationen aus Gl. (2.34):

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t). \quad (2.35)$$

Rechte Seite von Gl. (2.35) unabhängig von $\epsilon \Rightarrow$ linke Seite von Gl. (2.35) unabhängig von ϵ (Rechentechniken wie in Abschnitt

2.2.5 und 2.3.2):

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} L(q', \dot{q}', t) \right|_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{d\dot{q}_j}{d\epsilon}}_{\frac{d}{dt} \frac{dq_j}{d\epsilon}} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dq_j}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} + \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{=0 \text{ für Lösungen der Bewegungsgl.}} \frac{dq_j}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Noether-Theorem**: Für Lösungen q der Bewegungsgleichungen ist

$$\boxed{I(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{dq_j}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \Psi_j(q, \dot{q}, t)} \quad (2.36)$$

eine Konstante der Bewegung (auch Erhaltungsgröße oder Integral der Bewegung genannt).

Bemerkungen

1. Bleibt die Lagrange-Funktion invariant unter einer Gruppe von Transformationen, die von n_G unabhängigen Parametern α_i abhängt, so gibt es n_G Erhaltungsgrößen.
2. Ändert sich die Lagrange-Funktion um

$$\epsilon \frac{dQ(q, t)}{dt},$$

so ist

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \Psi_j(q, \dot{q}, t) - Q(q, t)$$

eine Erhaltungsgröße.

2.5.4 Beispiele

Es sei

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n).$$

Translationsinvarianz und Impulserhaltung

L sei invariant bzgl. Translation (aller Teilchen) entlang der x -Achse:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \epsilon \hat{e}_x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Berechne

$$\frac{d\vec{r}'_i}{d\epsilon} = \hat{e}_x$$

und damit

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \hat{e}_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \hat{e}_x = P_x. \quad (2.37)$$

Translationsinvarianz in x -Richtung impliziert Erhaltung der x -Komponente des Gesamtimpulses.

y - und z -Richtung analog.

Drehinvarianz und Drehimpulserhaltung

L sei invariant bzgl. Drehung (aller Teilchen) um die z -Achse:

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto x'_i = x_i - \epsilon y_i, \\ y_i &\mapsto y'_i = y_i + \epsilon x_i, \\ z_i &\mapsto z'_i = z_i \end{aligned}$$

oder zusammengefasst

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \epsilon \hat{e}_z \times \vec{r}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Berechne

$$\frac{d\vec{r}'_i}{d\epsilon} = \hat{e}_z \times \vec{r}_i$$

und damit

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \hat{e}_z \times \vec{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \cdot \hat{e}_z \times \vec{r}_i}_{\hat{e}_z \cdot \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i} \\
&= L_z.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Drehinvarianz um z -Achse impliziert Erhaltung der z -Komponente des Gesamtdrehimpulses.

x - und y -Richtung analog.

2.5.5 Hamilton-Funktion

Definition:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t). \\
p_j &= p_j(q, \dot{q}, t)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Das Symbol $\sim$ signalisiert, dass wir im Augenblick die Hamilton-Funktion (der Lagrange'schen Mechanik) als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, Geschwindigkeiten und der Zeit betrachten.

Für Lösungen der Bewegungsgleichungen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{H}}{dt} &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \underbrace{\frac{dL(q, \dot{q}, t)}{dt}}_{\sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Hängt L nicht explizit von der Zeit ab, dann ist $\tilde{H}$ eine Konstante der Bewegung.

Beispiel

$$\begin{aligned}
 L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} &= m \dot{\vec{r}} = \vec{p}, \\
 \tilde{H}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \underbrace{(m \dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{r}}}_{2T} - (T - U) = T + U. \\
 H(\vec{r}, \vec{p}) &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: Es sei

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

mit r **zeitunabhängigen, holonomen** Zwangsbedingungen, d. h.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f), \quad f = 3n - r.$$

Dann gilt

$$\tilde{H}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q),$$

wobei

$$V(q) = U(\vec{r}_1(q), \dots, \vec{r}_n(q)).$$

Begründung: Wegen

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

gilt nach Umordnen der Summe

$$\begin{aligned}
 T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}_{A_{jk}(q) = A_{kj}(q)} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k
 \end{aligned}$$

und damit für die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f A_{jk} (\delta_{jl} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{kl}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f A_{lk} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \underbrace{A_{jl}}_{A_{lj}} \dot{q}_j \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^f A_{lk} \dot{q}_k,
\end{aligned}$$

*: Umbenennung $j \rightarrow k$ in der zweiten Summe. Multipliziere mit $\dot{q}_l$ und summiere über l :

$$\sum_{l=1}^f \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f A_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k = 2T.$$

Damit folgt die Behauptung.

2.6 Hamilton-Formalismus

Bisher: Newton'sche und Lagrange'sche Formulierungen der Grundgesetze der Mechanik.

Alternative Formulierungen

1. Kanonische Gleichungen (Übergang zur quantisierten Theorie)
2. Hamilton-Jacobi-Gleichung

2.6.1 Hamilton-Funktion

Lagrange-Formalismus

$$p_j = p_j(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, f). \quad (2.40)$$

Ziel: Eliminiere verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ zugunsten der p_j :

$$p_j(q, \dot{q}, t) \xrightarrow{\text{Auflösen}} \dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t).$$

Bemerkung: Das Auflösen kann ein Problem sein $\rightarrow$ Hamilton'sche Formulierung mit Zwangsbedingung (Dirac).

Definition der Hamilton-Funktion

$$\boxed{H(q, p, t) = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t).} \quad (2.41)$$

Beispiel: Ebene Bewegung eines freien Teilchens in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}) &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2), \\ p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} &\Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi} &\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2}, \\ \Rightarrow H(\rho, p_\rho, p_\phi) &= p_\rho \dot{\rho} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{p_\rho^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{m\rho^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_\rho}{m} \right)^2 - \frac{m}{2} \rho^2 \left(\frac{p_\phi}{m\rho^2} \right)^2 \\ &= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2}. \end{aligned}$$

2.6.2 Kanonische Gleichungen

Beachte: $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$, etwa $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2}$ aus obigem Beispiel.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} \\
 &= -\frac{\partial L}{\partial q_j} \\
 &\stackrel{\text{EL}}{=} -\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \\
 &= -\dot{p}_j, \\
 \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \dot{q}_j + \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} \\
 &= \dot{q}_j.
 \end{aligned}$$

Hamilton'sche Gleichungen = Bewegungsgleichungen in den Veränderlichen q und p (wegen ihrer formalen Einfachheit und Symmetrie auch **kanonische Gleichungen** genannt):

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, f).} \quad (2.42)$$

Alternative Formulierungen

Lagrange	Hamilton
f DGLen 2. Ordnung	$2 f$ DGLen 1. Ordnung
Euler-Lagrange-Gleichungen	kanonische Gleichungen
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$	$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Außerdem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^f p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^f (-\dot{p}_j) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Hängt die Hamilton-Funktion (Lagrange-Funktion) nicht explizit von der Zeit ab, gilt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Hilfsmittel aus der Mathematik gewöhnlicher DGLen

Betrachte DGL zweiter Ordnung in expliziter Gestalt

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (2.43)$$

Die Funktion $y(x)$ ist eine Lösung in einem Intervall I , wenn sie

1. in I zweimal differenzierbar ist und
2. Gl. (2.43) in $x \in I$ erfüllt.

Behauptung: Gl. (2.43) lässt sich auf ein System von 2 DGLen

1. Ordnung für 2 Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ transformieren:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

„ $\Rightarrow$ “: y Lösung von Gl. (2.43) $\Rightarrow \vec{y} = (y_1, y_2) := (y, y')$ löst Gl. (2.44).

„ $\Leftarrow$ “: $\vec{y}$ sei differenzierbare Lösung von Gl. (2.44). Setze $y(x) := y_1(x) \Rightarrow y(x)$ 2-mal differenzierbar. $y_2(x) = y'(x)$ und Gl. (2.43) besteht.

Verallgemeinerung auf DGL n -ter Ordnung führt auf System von n DGLen 1. Ordnung.

Beispiel: Eindimensionaler, harmonischer Oszillator

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{C}{2} q^2,$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m},$$

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) = p\frac{p}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{C}{2} q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{C}{2} q^2.$$

L und H hängen nicht explizit von der Zeit ab $\Rightarrow E = \text{konst.}$

Lagrange	Hamilton
Euler-Lagrange-Gleichungen	kanonische Gleichungen
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow$ $m\ddot{q} + Cq = 0 \Leftrightarrow$ $\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \text{ mit } \omega^2 = \frac{C}{m}$ DGL 2. Ordnung $\ddot{q} = -\omega^2 q$	$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$ $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -Cq,$ System zweier DGLen 1. Ordnung $\dot{q}_1 = q_2,$ $\dot{q}_2 = -\omega^2 q_1$

Setze $q_1 = q$ und $q_2 = p/m$.

$$\dot{q}_1 = \dot{q} = q_2 = \frac{p}{m},$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{p}}{m} = -\underbrace{\frac{C}{m}}_{\omega^2} q.$$

2.6.3 Poisson-Klammer und Bewegungsintegrale

Es sei $f(q, p, t)$ eine stetig differenzierbare Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, kanonisch konjugierten Impulse und der Zeit. Die totale zeitliche Ableitung lautet

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Für Lösungen der kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, f)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit der so genannten **Poisson-Klammer**:

$$\boxed{\{f, g\} := \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right).} \quad (2.46)$$

Gl. (2.45):

$$\boxed{f \text{ ist Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0.} \quad (2.47)$$

Spezialfall: f hängt nicht explizit von der Zeit ab

$$f(q, p) \text{ ist Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow \{H, f\} = 0.$$

Eigenschaften der Poisson-Klammer:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (2.48)$$

$$c = \text{konst.} : \{f, c\} = 0, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\} &= \alpha_1 \{f_1, g\} + \alpha_2 \{f_2, g\}, \\ \{f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2\} &= \beta_1 \{f, g_1\} + \beta_2 \{f, g_2\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}, \quad (2.52)$$

$$\{q_i, q_j\} = 0,$$

$$\{p_i, p_j\} = 0,$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad (2.53)$$

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad (2.54)$$

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (2.55)$$

Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad (2.56)$$

f und g Erhaltungsgrößen $\Rightarrow \{f, g\} = \text{konst.}$

$$\text{d. h. } \{f, g\} \text{ Erhaltungsgröße.} \quad (2.57)$$

Beweis durch Nachrechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \{f, q_i\} &= \frac{\partial f}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}_{\delta_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_j}}_0 = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ \{f, p_i\} &= \frac{\partial f}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_j}}_0 - \frac{\partial f}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Gl. (2.53): Fundamentale Poisson'sche Klammerbeziehungen.
2. Gl. (2.57): Poisson'sches Theorem.

3. Gl. (2.48), (2.50) und (2.56) relevant im Zusammenhang mit Lie-Algebren.
4. Später: Übergang zur QM mit $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$.
5. Das Vorzeichen der Poisson-Klammer ist Konventionsfrage. Wir folgen Landau & Lifschitz und Scheck; Goldstein, Fließbach und Kuypers verwenden die entgegengesetzte Konvention.

Beispiel:

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|.$$

Drehimpuls $l_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$

$$\begin{aligned} \frac{dl_i}{dt} &= \{H, l_i\} \\ &= \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} \{\vec{p}^2, x_j p_k\} + \epsilon_{ijk} \{V(r), x_j p_k\}. \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \{\vec{p}^2, x_j p_k\} &= \epsilon_{ijk} (x_j \underbrace{\{\vec{p}^2, p_k\}}_0 + \underbrace{\{\vec{p}^2, x_j\}}_{2p_j} p_k) \\ &= 0 \quad \text{wegen } \epsilon\text{-Symbol,} \\ \epsilon_{ijk} \{V(r), x_j p_k\} &= \epsilon_{ijk} (x_j \underbrace{\{V(r), p_k\}}_{-V'(r)\frac{x_k}{r}} + \underbrace{\{V(r), x_j\}}_0 p_k) \\ &= 0 \quad \text{wegen } \epsilon\text{-Symbol.} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{dl_i}{dt} = 0,$$

d. h. für ein rotationssymmetrisches Potenzial ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Übung 8:

$$\{l_i, l_j\} = -\epsilon_{ijk} l_k. \quad (2.58)$$

2.6.4 Kanonische Transformationen

Motivation

Die Wahl von verallgemeinerten Koordinaten und somit auch von kanonisch konjugierten Impulsen ist nicht eindeutig.

Ziel: Versuche möglichst viele zyklische Variablen zu finden,
i. Allg. durch Transformation

$$\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}, \quad (\text{impliziert } (L, H) \rightarrow (\bar{L}, K))$$

so dass

$$\bar{L} \text{ zykl. in } Q_k, \text{ d.h. } \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_k} = 0 \stackrel{\text{EL}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_k} = 0 \Rightarrow P_k = \alpha_k = \text{konst.}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - L \\ \rightarrow K &= \sum_{j=1, j \neq k}^f P_j \dot{Q}_j + P_k \dot{Q}_k - \bar{L}(\cdots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \cdots, \cdots, \dot{Q}_k, \cdots) \end{aligned}$$

Kanonische Gleichung in k -ter Variable

$$\frac{\partial K}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k = 0.$$

Da P_k konstant ist, können wir eine Hamilton-Funktion aufstellen, die nur von $2(f-1)$ Variablen abhängt.

Anforderungen an kanonische Transformation

1. Umkehrbare Transformation

$$\{q, p\} \leftrightarrow \{Q, P\}, \quad (2.59)$$

die in beiden Richtungen n -mal stetig differenzierbar ist (C^n -Diffeomorphismus).

2. Struktur der kanonischen Gleichungen bleibt unverändert

$$\begin{aligned}\{q, p\} &\leftrightarrow \{Q, P\}, \\ H(q, p, t) &\leftrightarrow K(Q, P, t), \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, & \dot{Q}_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}, & \dot{P}_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j}.\end{aligned}$$

3. Kriterium: Minimale Wirkung (ausgedrückt durch Hamilton-Funktion)

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right] dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^f P_j \dot{Q}_j - K(Q, P, t) \right] dt &= 0.\end{aligned}$$

Sichergestellt, wenn die Integranden sich um nicht mehr als ein totales Zeitdifferential unterscheiden (siehe Abschnitt 2.4.2):

$$\left[\sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) - \sum_{j=1}^f P_j \dot{Q}_j + K(Q, P, t) \right] = \frac{dF}{dt} \quad (2.60)$$

mit der **erzeugenden Funktion** $F(q, Q, p, P, t)$. Da die Transformation umkehrbar ist, kann nur die Hälfte der $4f$ Variablen unabhängig sein.

4. Vier Möglichkeiten für erzeugende Funktionen:

$$\begin{aligned}F &= F_1(q, Q, t), \\ F &= F_2(q, P, t), \\ F &= F_3(Q, p, t), \\ F &= F_4(p, P, t).\end{aligned} \quad (2.61)$$

5. Ohne Beweis: Notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass Transformation aus Gl. (2.59) kanonische Trans-

formation ist:

$$\begin{aligned}\{Q_j, Q_k\}_{pq} &= \left\{ \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} \right\} = 0, \\ \{P_j, P_k\}_{pq} &= 0, \\ \{P_j, Q_k\}_{pq} &= \delta_{jk}.\end{aligned}\tag{2.62}$$

Entscheide, ob Transformation kanonisch ist, ohne Kenntnis der erzeugenden Funktion.

Illustration für 1. Möglichkeit

$$F = F_1(q, Q, t).$$

Gl. (2.60) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}& \left[\sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - H - \sum_{j=1}^f P_j \dot{Q}_j + K \right] - \underbrace{\frac{d}{dt} F_1(q, Q, t)}_{\frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j} \\ &= \sum_{j=1}^f \left(p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - \sum_{j=1}^f \left(P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) \dot{Q}_j + K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Illustration für $f(x, y, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \text{ für beliebige, unabhängige Funktionen } x(t) \text{ und } y(t).\end{aligned}$$

(a) Wähle x und y beliebig, aber zeitlich konstant ($\dot{x} = \dot{y} = 0$):

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

(b) Verwende (a), wähle x beliebig, aber zeitlich konstant ($\dot{x} = 0$). $y(t)$ beliebig $\Rightarrow \dot{y}(t)$ beliebig:

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(c) usw.

Koordinaten q und Q werden als unabhängig betrachtet $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \\P_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \\K - H &= \frac{\partial F_1}{\partial t}.\end{aligned}$$

1. Beispiel:

$$F_1(q, Q, t) = \sum_{k=1}^f q_k Q_k. \quad (2.63)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j, \\P_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j,\end{aligned}$$

d. h.

$$(q, p) \xrightarrow{F_1} (Q = p, P = -q).$$

Koordinaten und Impulse werden modulo Vorzeichen vertauscht; sie verlieren ihre ursprüngliche Bedeutung.

Illustration für „Gleichberechtigung“ von Koordinaten und Impulsen im Hamilton-Formalismus.

2. Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Es sei

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2}q^2 \cot(Q). \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot(Q), \\P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2(Q)}, \\K(P, Q) &= H(p, q),\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q), \\p &= \sqrt{2m\omega P} \cos(Q).\end{aligned}\tag{2.65}$$

$\Rightarrow$

$$K(Q, P) = \frac{2m\omega P \cos^2(Q)}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \frac{2P}{m\omega} \sin^2(Q) = \omega P. \tag{2.66}$$

In diesen Variablen ist Q zyklische Koordinate! Damit gilt

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{E}{\omega} = \text{konst.}$$

Aus

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

folgt

$$Q(t) = \omega t + \varphi_0.$$

Fazit: In diesen Variablen ist der harmonische Oszillator besonders einfach.

Umgeschrieben auf q und p :

$$\begin{aligned}q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0), \\p(t) &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}\tag{2.67}$$

Beachte: 2 Integrationskonstanten E und φ_0 .

Konsistent mit kanonischen Gleichungen für q und p :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\sqrt{2m\omega^2 E} \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 q.\end{aligned}$$

2.6.5 Phasenraum

Betrachte die Euler-Lagrange-Gleichung bzw. die kanonischen Gleichungen für einen Freiheitsgrad. Interpretiere Lösungen $(q(t), \dot{q}(t))$ bzw. $(q(t), p(t))$ als Parameterdarstellung einer Bahnkurve im $\mathbb{R}^2$.

Bezeichnungen

1. $\mathbb{R}^2$: Phasenraum (oder Zustandsraum)
2. Bahnkurve: Phasenbahn
3. Gesamtheit aller Phasenbahnen: Phasenbild oder Phasenportrait
4. Lösungen gewöhnlicher DGLen sind eindeutig. Phasenbahnen schneiden sich nicht.

Verallgemeinerung: f Freiheitsgrade $\Rightarrow$ Phasenraum ist $2f$ -dimensional. (Für DGL n -ter Ordnung ($n > 2$) liefert Übergang zu n DGLen 1. Ordnung n -dim. Phasenraum.)

Phasenraumvolumen als kanonische Invariante

Betrachte Integral über Gebiet Ω des Phasenraums:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega} dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f =: V.$$

Behauptung: Unter kanonischen Transformationen ändert sich das Volumen im Phasenraum nicht (i. Allg. wohl aber die Form):

$$\{q, p\} \leftrightarrow \{Q, P\}$$

mit

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega} dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f &= V \\ &= \underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega'} D dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f, \end{aligned}$$

wobei für die Funktionaldeterminante (siehe Präsenzübung) gilt

$$D = \frac{\partial(q_1, \dots, p_f)}{\partial(Q_1, \dots, P_f)} = 1.$$

Beweis: Siehe Landau-Lifschitz, §46.

Beispiel harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q), \\
 p &= \sqrt{2m\omega P} \cos(Q), \\
 \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos(Q) & \sqrt{\frac{1}{2m\omega P}} \sin(Q) \\ -\sqrt{2m\omega P} \sin(Q) & \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos(Q) \end{pmatrix} \\
 &= \cos^2(Q) + \sin^2(Q) = 1.
 \end{aligned}$$

Betrachte (q, p) -Phasenraum. Verwende Gl. (2.67) mit $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ($q(0)$ maximal):

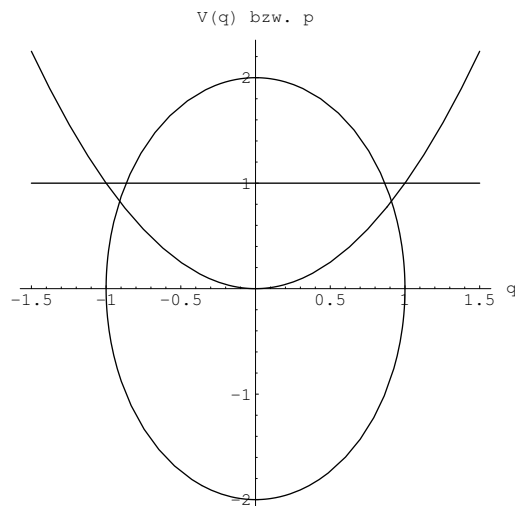
$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos(\omega t), \quad p(t) = -\sqrt{2mE} \sin(\omega t).$$

Phasenbahn $(q(t), p(t))$ beschreibt Ellipse

$$\frac{1}{2Em} p^2 + \frac{m\omega^2}{2E} q^2 = 1$$

mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2Em}.$$



$$m = 2, \quad \omega = 1, \quad E = 1.$$

Phasenraum wird mit wachsendem E vollständig ausgefüllt.
Bahnen schneiden sich nicht.

Volumen des Phasenraums für Phasenbahnen, deren Energie kleiner oder gleich E ist:

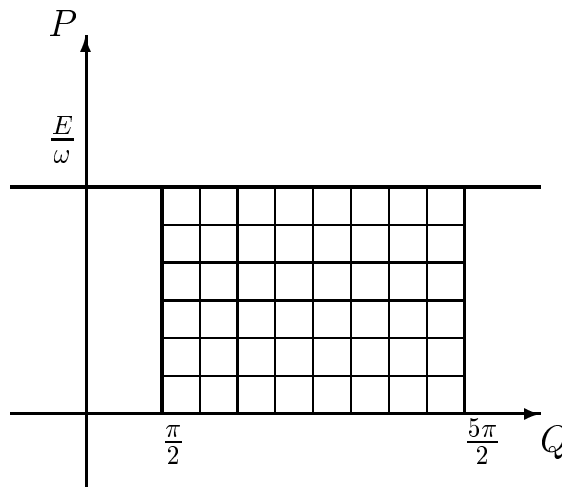
$$\underbrace{\int dq \int dp}_{H \leq E} = \pi ab = 2\pi \frac{E}{\omega}.$$

Variablen Q und P :

$$Q(t) = \omega t + \frac{\pi}{2},$$

$$P(t) = \frac{E}{\omega},$$

$$\int_0^{\frac{E}{\omega}} dP \int_0^T \omega dt = \frac{E}{\omega} \omega \underbrace{T}_{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\pi E}{\omega}.$$



Kapitel 3

Drehungen, Tensoren und Tensorfelder

- Fragestellung: Wie verhalten sich Observablen bzgl. Drehung des Koordinatensystems?

3.1 Orthogonale Transformationen

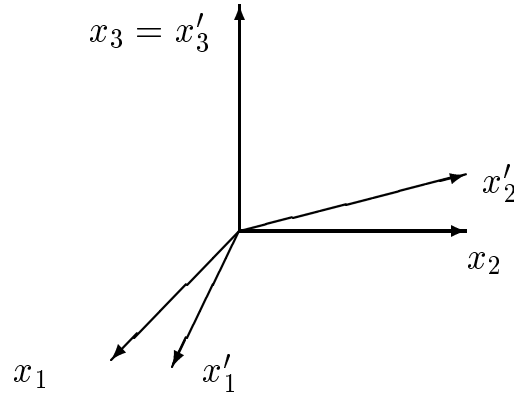
Betrachte zwei kartesische Koordinatensysteme KS und KS' mit gemeinsamem Ursprung, die relativ zueinander gedreht sind.

KS habe positiv orientierte ONB $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

(Rechte-Hand-Regel: Daumen $\leftrightarrow \hat{e}_1$, Zeigefinger $\leftrightarrow \hat{e}_2$, Mittelfinger $\leftrightarrow \hat{e}_3$.)

KS' habe ONB $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ (Orientierung noch nicht spezifiziert).

Z. B.: KS' relativ zu KS um gemeinsame 3-Achse gedreht:



1. Beschreibung ein und desselben Vektors bzgl. der beiden Basen:

$$\vec{r} = x_i \hat{e}_i = x'_i \hat{e}'_i \quad (\text{Einstein'sche Summenkonvention}). \quad (3.1)$$

2. Zusammenhang zwischen Koordinaten x_i und x'_i :

$$x'_i = \hat{e}'_i \cdot \vec{r} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j x_j =: D_{ij} x_j. \quad (3.2)$$

$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$: Richtungskosinus

3. Eigenschaften der (3,3)-Matrix D :

$$\vec{r}^2 = x_i x_i = x'_i x'_i = D_{ij} D_{ik} x_j x_k.$$

$\Rightarrow$

$$D_{ij} D_{ik} = \delta_{jk}. \quad (3.3)$$

Interpretiere die 3 Spalten

$$\begin{pmatrix} D_{1j} \\ D_{2j} \\ D_{3j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3)$$

als Koordinatenvektoren D_j . Gl. (3.3): Spalten sind ortho-normiert.

Wegen $D_{ij} = D_{ji}^T$ folgt aus Gl. (3.3)

$$\boxed{D^T D = \mathbb{1} \quad \text{und insbesondere} \quad D^T = D^{-1}.} \quad (3.4)$$

Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(D^T D) = \det(D^T) \det(D) = [\det(D)]^2 = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

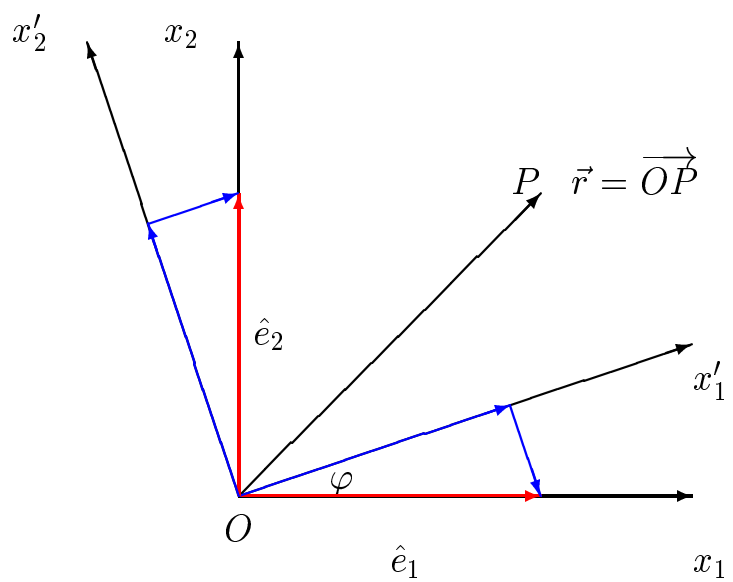
$\Rightarrow$

$$\boxed{\det(D) = \pm 1.} \quad (3.5)$$

4. Menge aller Transformationen aus Gl. (3.2) mit der Eigenschaft Gl. (3.4) = Gruppe $O(3)$ der orthogonalen Transformationen.
- (a) $\det(D) = 1$: Untergruppe $SO(3)$ (S für speziell, d. h. Bedingung an Determinante). Basis $\mathcal{B}'$ hat dieselbe Orientierung wie $\mathcal{B}$.
- (b) $\det(D) = -1$: Keine Untergruppe. Basis $\mathcal{B}'$ hat zu $\mathcal{B}$ entgegengesetzte (linkshändige) Orientierung.
5. Betrachte $SO(3)$. KS' sei um φ bzgl. der (gemeinsamen) Achse $\hat{e}_i = \hat{e}'_i$ gedreht:

$$\begin{aligned} D_1(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \\ D_2(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \\ D_3(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel: Drehung um 3-Achse



$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \\
 &= x_1 [\cos(\varphi) \hat{e}'_1 - \sin(\varphi) \hat{e}'_2] + x_2 [\cos(\varphi) \hat{e}'_2 + \sin(\varphi) \hat{e}'_1] + x_3 \hat{e}'_3 \\
 &= [\cos(\varphi) x_1 + \sin(\varphi) x_2] \hat{e}'_1 + [-\sin(\varphi) x_1 + \cos(\varphi) x_2] \hat{e}'_2 + x_3 \hat{e}'_3 \\
 &= x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3,
 \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

6. Entwickle für (infinitesimal) kleine φ (Linearisierung):

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &= 1 + \mathcal{O}(\varphi^2), \\ \sin(\varphi) &= \varphi + \mathcal{O}(\varphi^3), \\ D_i(\varphi) &=: \mathbb{1} - \varphi \mathcal{T}_i + \mathcal{O}(\varphi^2), \\ \mathcal{T}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die $\mathcal{T}_j$ heißen auch infinitesimale Generatoren der Drehungen.

Vorzeichenkonvention ist an „passive Drehungen“, d. h. Drehungen des Koordinatensystems angepasst.

Sie bilden eine Basis der reellen Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ der Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(3) &:= \left\{ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathcal{T}_i \mid \varphi_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Menge aller reellen, schiefsymmetrischen} \\ &\quad (3,3)\text{-Matrizen } B \text{ mit } B^T = -B.\end{aligned}$$

7. Vertauschungsrelationen:

Betrachte

$$\begin{aligned}
 & D_2(\varphi_2)D_1(\varphi_1) - D_1(\varphi_1)D_2(\varphi_2) \\
 &= (\mathbb{1} - \varphi_2\mathcal{T}_2 + \dots)(\mathbb{1} - \varphi_1\mathcal{T}_1 + \dots) \\
 &\quad - (\mathbb{1} - \varphi_1\mathcal{T}_1 + \dots)(\mathbb{1} - \varphi_2\mathcal{T}_2 + \dots) \\
 &= -\varphi_2\varphi_1 \underbrace{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}_{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1} + \dots.
 \end{aligned}$$

Kommutator $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ ist ein Maß der Nichtvertauschbarkeit.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

d. h.

$$[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] = \mathcal{T}_3.$$

(a) Allgemein (**Übung 9**):

$$\boxed{[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = \epsilon_{ijk} \mathcal{T}_k.}$$

(b) ϵ_{ijk} : Strukturkonstanten der Drehgruppe.

Strukturkonstanten sind Kennzeichen der zugrundeliegenden Transformationsgruppe, hier der orthogonalen Gruppe.

(c) Drehungen um verschiedene Achsen vertauschen nicht miteinander (nichtabelsche Gruppe).

8. Übergang von infinitesimalen Drehungen zu endlichen Drehungen mit Hilfe der Exponentialfunktion:

$$\exp(-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

Alle Drehungen $D \in \text{SO}(3)$ erhält man durch

$$D = \exp(-B) \quad \text{mit} \quad B = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathcal{T}_i.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, z. B. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 2π -periodisch in φ_3 .

9. Alternativer Standpunkt: Aktive Drehung des Vektors $\vec{r} \mapsto \vec{r}'$ um Drehachse $\hat{e}_k$ mit Drehwinkel φ . Die Koordinaten x'_i des transformierten Vektors lauten

$$x'_i = D_{k,ij}(-\varphi)x_j = D_{k,ij}^{-1}(\varphi)x_j.$$

3.2 Tensoren

3.2.1 Definition

Eine mathematische oder physikalische Größe T lasse sich in einem kartesischen Koordinatensystem KS durch 3^n Elemente $t_{ij\dots k}$ beschreiben. Die n Indizes sind geordnet, jeder Index nimmt die Werte 1, 2 und 3 an.

Betrachte zunächst nur $D \in \text{SO}(3)$, d. h. $\det(D)=1$.

T heißt Tensor n -ter Stufe, wenn für die Komponenten $t_{ij\dots k}$ bei einer Transformation von KS nach KS' gilt

$$t'_{i'j'\dots k'} = D_{i'i}D_{j'j}\cdots D_{k'k}t_{ij\dots k} \quad (3.6)$$

mit der speziellen, orthogonalen Transformation D .

3.2.2 Tensor nullter Stufe

besteht aus einer Komponente, hat in allen KS denselben Wert und heißt auch (invarianter) Skalar.

Beispiele:

- Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ aus zwei Vektoren.
- Masse m eines Teilchens.
- Ladung eines Elektrons.
- Zeitkoordinate t .

3.2.3 Tensor 1. Stufe

besteht aus 3 Komponenten t_1 , t_2 und t_3 :

$$t'_i = D_{ij} t_j$$

entspricht Transformationsgesetz für Vektoren, d. h. Tensor 1. Stufe lässt sich als Vektor darstellen.

3.2.4 Tensor 2. Stufe

besitzt 9 Komponenten t_{ij} mit

$$t'_{ij} = D_{ik} \underbrace{D_{jl}}_{D_{lj}^T} t_{kl}$$

oder in Matrizenform

$$T' = D T D^T.$$

Tensor 2. Stufe lässt sich als Matrix darstellen.

3.2.5 Rechenregeln zur Konstruktion weiterer Tensoren

1. Elementare algebraische Operationen:

S und T Tensoren n -ter Stufe und $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\alpha S + \beta T$$

ist Tensor n -ter Stufe (Definition komponentenweise).

2. Tensorprodukt:

S und T Tensoren m -ter und n -ter Stufe $\Rightarrow$

$$U := ST \quad \text{mit} \quad u_{ij\dots kl\dots} = s_{ij\dots} t_{kl\dots}$$

ist Tensor $(m + n)$ -ter Stufe.

3. Verjüngung oder Kontraktion von Tensorindizes:

T Tensor n -ter Stufe $\Rightarrow t_{i\dots jj\dots m}$ liefert Tensor $(n - 2)$ -ter Stufe.

Begründung:

$$\begin{aligned}
 t'_{i'\dots j'k'\dots m'} &= \underbrace{D_{i'i} \cdots D_{j'j} D_{k'k} \cdots D_{m'm}}_{n \text{ Faktoren}} t_{i\dots jj\dots m}, \\
 &\quad \delta_{j'k'} \Big| \cdots \\
 = t'_{i'\dots j'j'\dots m'} &= D_{i'i} \cdots \underbrace{\delta_{j'k'} D_{j'j} D_{k'k}}_{D_{j'j} D_{j'k} = \delta_{jk}} \cdots D_{m'm} t_{i\dots jj\dots m}, \\
 &= \underbrace{D_{i'i} \cdots D_{m'm}}_{(n-2) \text{ Faktoren}} t_{i\dots jj\dots m}.
 \end{aligned}$$

Beispiel: „Skalarprodukt“ zweier Tensoren 1. Stufe.

3.2.6 Fundamentaltensor 2. Stufe

Betrachte Tensor 2. Stufe, dessen Komponenten relativ zu KS durch Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gegeben seien. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \delta'_{ij} &= D_{ik} D_{jl} \delta_{kl} \\
 &= D_{ik} D_{jk} \\
 &= D_{ik} D_{kj}^T \\
 &= \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Fundamental- oder Einheitstensor hat in allen Koordinatensystemen dieselben Komponenten. Er ist ein so genannter invarianter Tensor.

3.2.7 Symmetrieeigenschaften

Illustration: Es sei T Tensor 3. Stufe mit

$$t_{ijk} = \begin{cases} t_{jik} & \text{d. h. symmetrisch} \\ -t_{jik} & \text{d. h. schief- oder antisymmetrisch} \end{cases}$$

bzgl. des ersten Indexpaares. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} t'_{ijk} &= D_{il}D_{jm}D_{kn}t_{lmn} \\ &= \pm D_{il}D_{jm}D_{kn}t_{mln} \\ &= \pm D_{jm}D_{il}D_{kn}t_{mln} \\ &= \pm t'_{jik}, \end{aligned}$$

d. h. Symmetrieeigenschaften bleiben unter Transformationen erhalten.

Verallgemeinerung auf andere Indexpaare und Tensoren höherer Stufe klar.

Beispiel: T beliebiger Tensor 2. Stufe. Zerlegung in symmetrischen Tensor S und antisymmetrischen Tensor A :

$$t_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})}_{s_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})}_{a_{ij}}.$$

3.2.8 Epsilontensor

Betrachte einen Tensor 3. Stufe, dessen Komponenten relativ zu KS durch das Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben seien.

Behauptung:

$$\epsilon'_{ijk} = D_{il}D_{jm}D_{kn}\epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk}. \quad (3.7)$$

Beachte: $\det(D)=+1$.

1. (Mindestens) zwei freie Indizes sind gleich, z. B. $i = j$;
Vorsicht, jetzt nicht über i summieren:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{iik} &= 0, \text{ da} \\ D_{il}D_{im}D_{kn}\epsilon_{lmn} &= D_{im}D_{il}D_{kn}\epsilon_{lmn} \\ &= -D_{im}D_{il}D_{kn}\epsilon_{mln} \\ &= -D_{il}D_{im}D_{kn}\epsilon_{lmn} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. (i, j, k) ist gerade Permutation von $(1, 2, 3)$, z. B.

$$\begin{aligned}\epsilon'_{123} &= D_{1l}D_{2m}D_{3n}\epsilon_{lmn} \\ &= \det \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\det(D)}_{+1} \cdot 1 = \epsilon_{123}.\end{aligned}$$

3. (i, j, k) ist ungerade Permutation von $(1, 2, 3)$, z. B.

$$\begin{aligned}\epsilon'_{213} &= D_{2l}D_{1m}D_{3n}\epsilon_{lmn} \\ &= -D_{1l}D_{2m}D_{3n}\epsilon_{lmn} \\ &= \det(D) \cdot (-1) = \epsilon_{213}.\end{aligned}$$

4. Bemerkung: Epsilontensor ist nur bzgl. der eigentlichen Drehungen ein invarianter Tensor.

3.2.9 Pseudotensoren

Bisher: Eigentliche Drehungen.

Jetzt: Frage nach dem Spiegelungsverhalten von Tensoren.

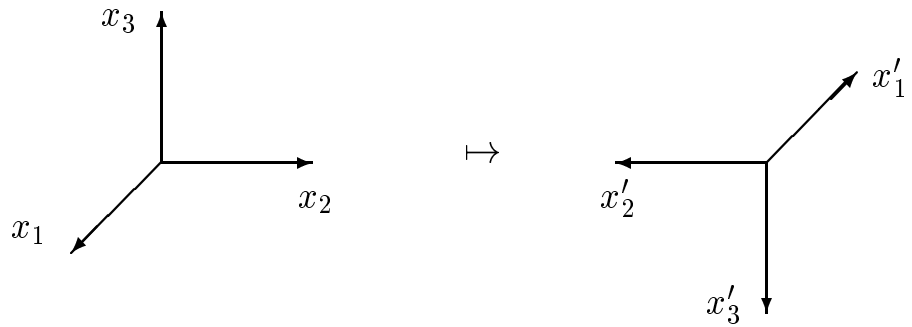
Motivation: Polare gegen axiale Vektoren, z. B. $\vec{r} \leftrightarrow \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Axiale Vektoren besitzen einen Drehsinn, werden auch als Pseudovektoren bezeichnet.

Betrachte Koordinaten- oder Rauminversion

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3).$$

Rechtshändiges Koordinatensystem wird in linkshändiges übergeführt.



Zugehörige Matrix (P für Parität)

$$P = -\mathbb{1}.$$

Für die Komponenten eines Tensors n -ter Stufe gilt

$$t'_{ij\dots k} = (-)^n t_{ij\dots k}, \quad (3.8)$$

d. h. Tensoren gerader Stufe bleiben ungeändert und Tensoren ungerader Stufe ändern Vorzeichen.

Ein Pseudotensor n -ter Stufe verhält sich unter eigentlichen Drehungen wie ein Tensor n -ter Stufe. Sein Spiegelungsverhalten unterscheidet sich allerdings um einen Faktor (-1) .

Beispiel: Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist Pseudovektor,

$$\begin{aligned} x_i &\xrightarrow{P} x'_i = -x_i, \\ p_i = m \frac{dx_i}{dt} &\xrightarrow{P} p'_i = m \frac{-dx_i}{dt} = -p_i, \\ l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 &\xrightarrow{P} l'_1 = (-x_2)(-p_3) - (-x_3)(-p_2) \\ &= l_1 \quad \text{und zyklisch.} \end{aligned}$$

Was bedeutet dies für den Epsilontensor?

$$l_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \xrightarrow{P} l'_i = \epsilon'_{ijk} x'_j p'_k = \epsilon'_{ijk} (-x_j) (-p_k) = \epsilon'_{ijk} x_j p_k \stackrel{!}{=} l_i \\ \Rightarrow \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk},$$

d. h. der Epsilontensor ist ein Pseudotensor: $1 = (-1)(-1)^3$.

Zusammengefasst: Sei $D \in O(3)$. Die Komponenten eines Tensors T /Pseudotensors P n -ter Stufe transformieren wie

$$\boxed{t'_{i'j'\dots k'} = D_{i'i} D_{j'j} \dots D_{k'k} t_{ij\dots k}} \quad (3.9)$$

und

$$\boxed{p'_{i'j'\dots k'} = \det(D) D_{i'i} D_{j'j} \dots D_{k'k} p_{ij\dots k}} \quad (3.10)$$

3.3 Tensorfelder

3.3.1 Definition

Bei einem Tensorfeld T n -ter Stufe sind die 3^n Komponenten Funktionen der Koordinaten x_1, x_2 und x_3 (abgekürzt zu x) mit Transformationsverhalten

$$t'_{i'j'\dots k'}(x') = D_{i'i} D_{j'j} \dots D_{k'k} t_{ij\dots k}(x), \quad (3.11)$$

wobei

$$x'_i = D_{ij} x_j.$$

Pseudotensor analog zu Gl. (3.10).

Beispiele:

1. Skalares (elektrisches) Potenzial Φ aus Gl. (2.30).
2. Elektrisches Feld $\vec{E}$.

3. Übung 10.

3.3.2 Ableitungen von Tensorfeldern

Es sei $T(x)$ Tensorfeld n -ter Stufe mit Komponenten $t_{jk\dots l}(x)$.
Behauptung: Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} t_{jk\dots l}(x) =: u_{ijk\dots l}(x) \quad (3.12)$$

definieren ein Tensorfeld $U(x)$ $(n+1)$ -ter Stufe.

Begründung:

$$\begin{aligned}
 x'_i &= D_{ij}x_j \\
 \Rightarrow D_{im}x'_i &= \underbrace{D_{im}D_{ij}}_{\delta_{mj}}x_j = x_m. \\
 \frac{\partial}{\partial x'_i} &= \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_m} \\
 &= D_{im} \frac{\partial}{\partial x_m}.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Umbenennung $i \rightarrow i'$ und $m \rightarrow i$)

$$\begin{aligned}
 u'_{i'j'k'\dots l'}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'_{i'}} t'_{j'k'\dots l'}(x') \\
 &= D_{i'i} D_{j'j} D_{k'k} \dots D_{l'l} \frac{\partial}{\partial x_i} t_{jk\dots l}(x) \\
 &= D_{i'i} D_{j'j} D_{k'k} \dots D_{l'l} u_{ijk\dots l}(x).
 \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Φ skalares Feld $\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ Komponenten eines Vektorfeldes bzw. Tensorfeldes 1. Stufe.
2. V_i Komponenten eines Vektorfeldes $\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ Komponenten eines Tensorfeldes 2. Stufe.
3. Verjüngung: V_i Komponenten eines Vektorfeldes $\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$ Komponenten eines skalaren Feldes.

3.4 Tensorgleichungen und Kovarianz

Ausgangspunkt: In einem System KS seien alle Komponenten $t_{ij\dots k}$ eines Tensors T gleich Null. $\Rightarrow$ Komponenten sind in allen Systemen KS' gleich Null:

$$t'_{i'j'\dots k'} = D_{i'i} D_{j'j} \dots D_{k'k} \underbrace{t_{ij\dots k}}_0 = 0.$$

Folgerung: $t_{ij\dots k} = s_{ij\dots k}$ in einem KS $\Rightarrow t'_{ij\dots k} = s'_{ij\dots k}$ in allen KS', denn $T + (-S) = 0$.

Eine Tensorgleichung

$$\begin{aligned} S &= T, \\ s_{ij\dots k} &= t_{ij\dots k}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

gilt für jede Wahl von Achsen.

Bedeutung für physikalische Gesetze: Drückt man ein physikalisches Gesetz als Tensorgleichung aus, so garantiert man seine Kovarianz bzgl. eines Wechsels des KS. Mit Kovarianz meint man, dass die Gleichungen ihre Form bei einer Transformation von einem KS zu einem anderen beibehalten.

Relevant wegen folgender Prinzipien:

1. Isotropie des Raumes: Alle Richtungen im Raum sind bzgl. der Formulierung fundamentaler physikalischer Gesetze äquivalent.
 - (a) In der klassischen Mechanik ist die Trägheit eines Körpers unabhängig von der Richtung seiner Bewegung.
 - (b) Anziehung/Abstoßung durch eine elektrische Punktladung ist in alle Richtungen gleich.
 - (c) Erkenntnis der Isotropie insofern „erstaunlich“, weil an jedem Punkt der Erdoberfläche sich die vertikale Richtung deutlich von jeder horizontalen Richtung unterscheidet (aufgrund der Gravitation).
Aber: Rein lokales Phänomen.
Auf einer größeren Längenskala ist die Isotropie (und die Homogenität) des Raumes (höchstwahrscheinlich) eine Konsequenz der Gleichförmigkeit, mit der Materie und Strahlung über das Universum verteilt sind.
 - (d) Mathematische Konsequenz der Isotropie: Gleichungen, die ein fundamentales physikalisches Gesetz ausdrücken, dürfen ihre Form nicht ändern, wenn das Bezugssystem gedreht wird.

Beispiel: Die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

ist eine Tensorgleichung erster Stufe.

2. Homogenität des Raumes: Alle Gebiete des Raumes sind äquivalent, d. h. die physikalischen Gesetze sind in allen Teilen des Kosmos äquivalent.

Mathematische Konsequenz: Kovarianz unter Translation der Achsen.

3. Kovarianz bzgl. Parität ist keine Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung (Neutron-Betazerfall $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$).

Kapitel 4

Spezielle Relativitätstheorie

4.1 Motivation

Inertialsystem IS = System, das sich relativ zum Fixsternhimmel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

4.1.1 Galilei'sches Relativitätsprinzip

1. (Spezielles) Prinzip der Relativität: Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.
„Gleichwertig“ = Forminvarianz der grundlegenden physikalischen Gesetze.
2. Nichtrelativistische Mechanik: Newton'sche Axiome gelten in allen IS.

Frage: Welche Transformationen ermöglichen Forminvarianz der Newton'schen Axiome?

Antwort: Galilei-Transformation zwischen KS und KS'

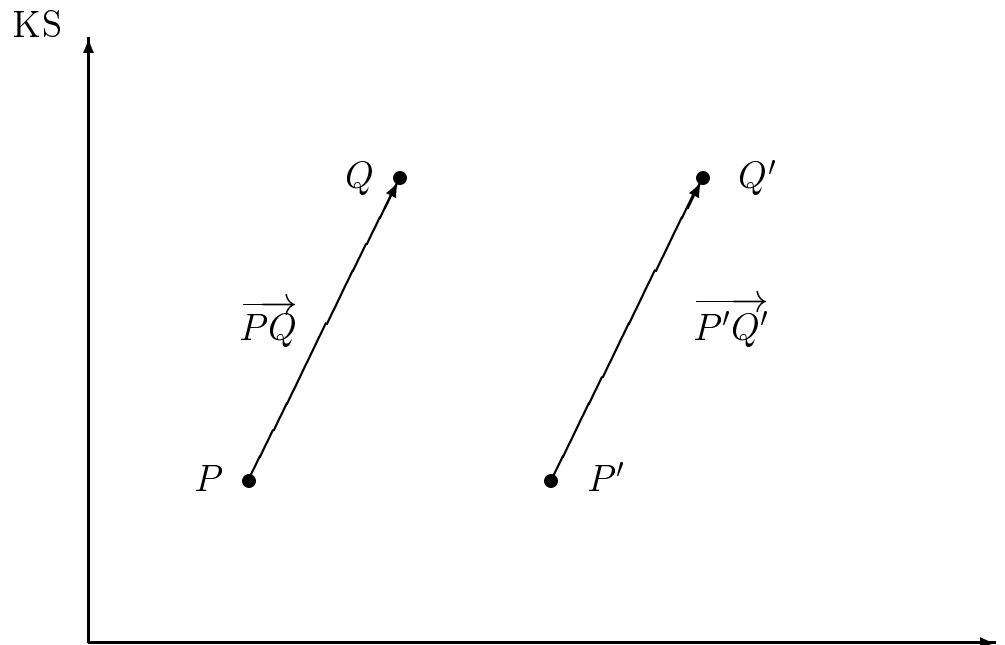
$$\begin{aligned}x'_i &= D_{ij}x_j - V_it - a_i, \\t' &= \lambda t - b.\end{aligned}$$

Betrachte

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

1. Invariant unter $O(3)$, da Tensorgleichung.

2. Invariant unter Translationen, da $\vec{r}$ und $\vec{F}$ Vektoren des affinen Raums $\mathbb{E}^3$:



Betrachte zwei Punkte $P = (x_1, x_2, x_3)$ und $Q = (y_1, y_2, y_3)$ des Anschauungsraums $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x_i und y_i . Die Abbildung

$$\vec{\varphi}(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

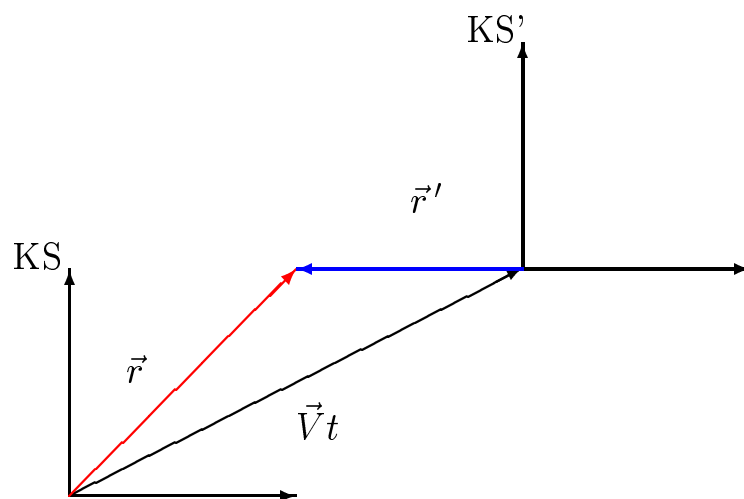
ordnet den beiden Punkten einen Vektor des affinen Raums $\mathbb{E}^3$ zu.

Wirkung einer Translation T_A des $\mathbb{R}^3$ mit $T_A(P) = P' = P + A$ auf $\mathbb{E}^3$:

$$\vec{\varphi}(T_A(P), T_A(Q)) = \vec{\varphi}(P + A, Q + A) = \vec{\varphi}(P, Q).$$

3. Spezielle GT

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t.$$



$$\begin{array}{c|c} \text{KS} & \text{KS}' \\ \hline m\vec{a} = \vec{F} & m\vec{a}' = \vec{F}' \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt'} &= \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V}, \\ \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \\ \Rightarrow \vec{F} &= \vec{F}'. \end{aligned}$$

Beachte:

$$t' = \lambda t - b, \quad dt' = \lambda dt, \quad \frac{d^n}{dt'^n} = \frac{1}{\lambda^n} \frac{d^n}{dt^n},$$

d. h. für $n = 2$ identisch (ohne geschwindigkeitsabhängige (Reibungs-) Kräfte).

Zeit ist „absolut“ in dem Sinne, dass eine Relativbewegung zweier IS in die Transformation der Zeit nicht eingeht.

Mechanik des täglichen Lebens und Himmelsmechanik werden mit sehr großer Genauigkeit durch Galilei-invariante Theorie (der Gravitation) beschrieben.

Vergleich von Größenordnungen:

1. (Schneller) Mensch: 10 m/s
2. Flugzeug: 0,3 km/s
3. Erde (auf Umlaufbahn um Sonne): 30 km/s
4. Lichtgeschwindigkeit: $c \approx 300\,000$ km/s

4.1.2 Grenzen der Gültigkeit

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen IS im Widerspruch zu

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

der Galilei-Transformation.

2. Teilchen ohne Masse (z. B. Lichtquanten) tragen Energie und Impuls („neue Kinematik“):

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow E = \sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2}.$$

3. Lebensdauer (Zerfall) bewegter Teilchen

$$\tau = \tau(v).$$

4.2 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Neues Postulat (führt zu einer Ablösung des obigen 2. Postulats):¹

Das Licht breitet sich im Vakuum bezüglich jedes Inertialsystems in allen Richtungen mit der universellen Geschwindigkeit c aus. Diese Geschwindigkeit ist eine Naturkonstante.

Gesucht: Neue Transformationen zwischen ISen, die mit Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verträglich sind.

Betrachte zwei Inertialsysteme KS und KS' mit Uhren.

- KS :

1. Zur Zeit t_1 werde am Punkt P_1 ($\vec{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}$) ein Lichtblitz erzeugt.
2. Ausbreitung im Vakuum als Kugelwelle um P_1 mit konstanter Lichtgeschwindigkeit c .
3. Messung des Signals für $t_2 > t_1$ an P_2 :

$$|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = c(t_2 - t_1)$$

oder

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 = 0. \quad (4.1)$$

4. Angabe von 3 räumlichen Koordinaten + Zeit, zu der an diesem Punkt etwas passiert (z. B. Emission oder Nachweis eines Signals): Ereignis oder Weltpunkt.
Zeitliche Abfolge von Ereignissen in der Form $(t, \vec{x}(t))$: Weltlinie.

- KS'

1. Koordinaten t'_i und x'_i .

¹Wir wollen $\dots$ die $\dots$ Voraussetzung einführen, dass sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze.

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (\vec{x}'_2 - \vec{x}'_1)^2 = 0.$$

- Mathematische Forderung an Transformation

Definiere $\vec{z} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ und $z^0 := c(t_2 - t_1)$.

Gesucht: Transformationen, die

$$(z^0)^2 - \vec{z}^2 \tag{4.2}$$

invariant lassen.

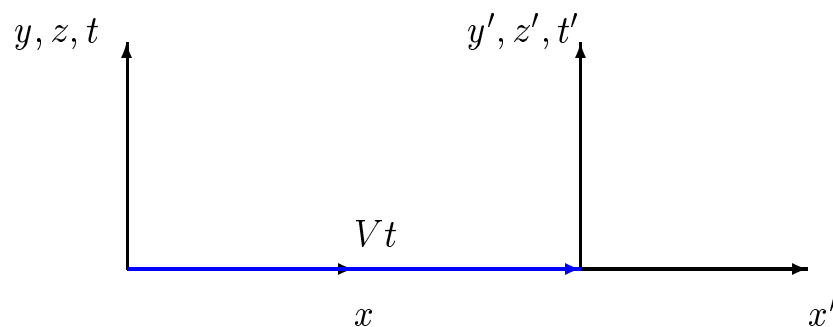
- Orthogonale Transformationen der räumlichen Koordinaten, Verschiebungen der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinaten sowie Zeitspiegelungen erfüllen Gl. (4.2).

4.3 Spezielle Lorentz-Transformationen

Frage: Welche Transformationen ersetzen die speziellen Galilei-Transformationen?

Betrachte zwei ISe KS und KS' mit

1. Ursprünge stimmen für $t = t' = 0$ überein,
2. KS' bewegt sich mit Geschwindigkeit V relativ zu KS in x -Richtung,
3. beide Systeme haben dieselbe Orientierung.



Zur Zeit $t = 0$ strahle im Ursprung von KS eine Lichtquelle einen Lichtblitz aus.

Postulat: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen $\Rightarrow$

$$\boxed{c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.} \quad (4.3)$$

Ansatz für Transformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Motivation für Struktur

1. Die räumlichen Richtungen senkrecht zur Bewegung nehmen an Bewegung nicht teil $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y' = y &\Rightarrow \text{3. Zeile } z_3 = (0, 0, 1, 0), \\ z' = z &\Rightarrow \text{4. Zeile } z_4 = (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

2. ct' und x' hängen nicht von y und z ab, da wegen der Homogenität des Raums kein Punkt in der (y, z) -Ebene als Koordinatenursprung bevorzugt werden kann $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in der rechten oberen Ecke.}$$

$\Rightarrow$

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

Lösung für Matrix (**Übung 10**):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda) \\ -\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Zusammenhang zwischen λ und V :

Betrachte Ursprung von KS'

$$\text{Koordinaten in KS': } x' = y' = z' = 0,$$

$$\text{Koordinaten in KS: } x = Vt, y = z = 0.$$

Einsetzen in Gl. (4.5) liefert

$$x' = 0 = -\sinh(\lambda)ct + \cosh(\lambda)Vt \Rightarrow \tanh(\lambda) = \frac{V}{c} =: \beta.$$

1. β ist Geschwindigkeit von KS' relativ zu KS in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c .
2. λ : Rapidität.

Verwende Beziehungen zwischen hyperbolischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\cosh(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\lambda)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma, \\ \sinh(\lambda) &= \frac{\tanh(\lambda)}{\sqrt{1 - \tanh^2(\lambda)}} = \beta\gamma.\end{aligned}$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}ct' &= \cosh(\lambda)ct - \sinh(\lambda)x = \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= -\sinh(\lambda)ct + \cosh(\lambda)x = \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ \tanh(\lambda) &= \frac{V}{c} = \beta, \\ \cosh(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma, \\ \sinh(\lambda) &= \beta\gamma.\end{aligned}$$

Zugehörige Matrix für spezielle Lorentz-Transformation

$$\boxed{L(\beta \hat{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}. \quad (4.6)$$

KS' bewegt sich relativ zu KS mit V in x -Richtung.
 $-1 < \beta < 1$ ist Geschwindigkeit in Einheiten von c .

4.4 Diskussion

4.4.1 Nichtrelativistischer Grenzfall

$c \rightarrow \infty$ impliziert $\beta = V/c \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow t, \\x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow x - Vt,\end{aligned}$$

d. h. spezielle Galilei-Transformation als Grenzfall.

4.4.2 Addition von Geschwindigkeiten (parallele Richtungen)

Betrachte zwei spezielle Lorentz-Transformationen entlang der x -Achse: KS'' bewege sich mit β_2 relativ zu KS' , KS' mit β_1 relativ zu KS .

Gesucht: Transformation von KS nach KS'' . Matrizen sind vom Typ

$$\begin{pmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Für Multiplikation genügt es den linken oberen Block zu betrachten:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(\beta_2)\mathbb{L}(\beta_1) &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 + \beta_2\beta_1\gamma_2\gamma_1 & -\gamma_2\gamma_1(\beta_1 + \beta_2) \\ -\gamma_2\gamma_1(\beta_2 + \beta_1) & \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2\beta_1) \end{pmatrix} \\&\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_3 & -\beta_3\gamma_3 \\ -\beta_3\gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \mathbb{L}(\beta_3).\end{aligned}$$

Betrachte Diagonalelemente:

$$\gamma_3 = \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2\beta_1).$$

Setze in Nichtdiagonalelemente ein:

$$-\beta_3\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_1(\beta_1 + \beta_2) = -\gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2\beta_1) \frac{\beta_2 + \beta_1}{1 + \beta_2\beta_1}.$$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsadditionsgesetz für parallele Richtungen

$$\beta_3 = \frac{\beta_2 + \beta_1}{1 + \beta_2\beta_1}.$$

Spezial- und Grenzfälle

1. $|\beta_1|, |\beta_2| \ll 1 \Rightarrow \beta_3 \approx \beta_1 + \beta_2.$
2. $|\beta_1| = 1, \beta_2 < 1 \Rightarrow \beta_3 = (1 + \beta_2)/(1 + \beta_2) = 1.$
3. $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_3 = (1 + 1)/(1 + 1) = 1.$
4. Fazit: Die Lichtgeschwindigkeit wird nie überschritten.

4.4.3 Homogene Lorentz-Gruppe L oder $O(1,3)$

Sei $V = \mathbb{R}^4$. Wir definieren die **Minkowski-Metrik**

$$M(x, x) = x_0x_0 - \sum_{i=1}^3 x_ix_i = x^T G x$$

mit

$$G = (G_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Nummerierung von 0 bis 3 ist an die Physik angepasst.

Betrachte lineare Abbildung

$$x'_i = \Lambda_{ij} x_j.$$

Interpretation: Allgemeiner Übergang von Inertialsystem KS nach KS' mit Forderung (siehe Gl. (4.3)):

$$x^T \Lambda^T G \Lambda x = M(x', x') \stackrel{!}{=} M(x, x) = x^T G x,$$

d. h.

$$\boxed{\Lambda^T G \Lambda = G.} \quad (4.7)$$

Die Matrizen Λ bilden die **homogene Lorentz-Gruppe**

$$O(1, 3) = L = \{\Lambda | \Lambda \text{ reelle, invertierbare } (4, 4)\text{-Matrix mit } \Lambda^T G \Lambda = G\}.$$

Eigenschaften der $(4, 4)$ -Matrizen Λ

1. $\det(\Lambda) = \pm 1$. Denn:

$$\det(G) = -1 = \det(\Lambda^T G \Lambda) = \underbrace{\det(\Lambda^T) \det(G) \det(\Lambda)}_{\det(\Lambda)} = -(\det(\Lambda))^2.$$

$\det(\Lambda) = +1$: Eigentliche Lorentz-Transformation.

2. $\Lambda_{00} \geq 1$ oder $\Lambda_{00} \leq -1$. Denn:

Betrachte die Matrix-Gl. (4.7) für $i = j = 0$:

$$1 = \underbrace{\Lambda_{0k}^T}_{\Lambda_{k0}} G_{kl} \Lambda_{l0} = \Lambda_{00}^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^3 \Lambda_{k0}^2}_{\leq 0}. \quad \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

$\Lambda_{00} \geq 1$: orthochrone Transformation; Zeitrichtung bleibt erhalten.

3. Vier so genannte Zweige $L_{+,-}^{\uparrow,\downarrow}$:

(a) $+$: $\det(\Lambda) = 1$,

(b) $-$: $\det(\Lambda) = -1$,

(c) $\uparrow$: $\Lambda_{00} \geq 1$,

(d) $\downarrow$: $\Lambda_{00} \leq -1$.

4. Untergruppe der **eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen**:

$$L_+^{\uparrow} = \{ \Lambda | \Lambda \text{ reelle, invertierbare } (4, 4)\text{-Matrix,} \\ \Lambda^T G \Lambda = G, \det(\Lambda) = +1, \Lambda_{00} \geq 1 \}.$$

5. Besondere Transformationen:

$$\text{Identität: } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^\uparrow$$

$$\text{Spiegelung der Raumachsen: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_-^\uparrow$$

$$\text{Umkehrung der Zeitrichtung: } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_-^\downarrow$$

$$\text{Produkt } PT: PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_+^\downarrow$$

$\{E, P, T, PT\}$: Klein'sche Gruppe (Felix Klein, 1849 - 1925),
abelsch (Diagonalmatrizen kommutieren miteinander).

6. $L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$ keine Untergruppen von L , da sie Identität nicht enthalten.

7. $L = L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow$.

8. Jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich als Produkt

$$\Lambda = L\mathcal{R}$$

parametrisieren mit

(a) eigentlicher Drehung (3 Parameter)

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & D & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{mit } D \in \text{SO}(3)$$

und

(b) spezieller Lorentz-Transformationen L (3 Parameter).

9. Insgesamt 6 unabhängige Parameter.

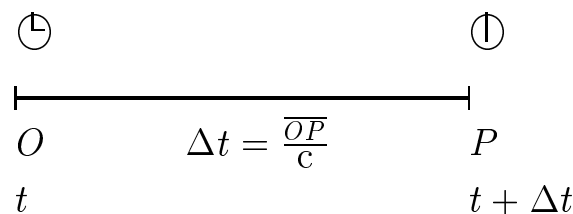
4.4.4 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Definition von räumlichen und zeitlichen Abständen (Länge und Zeit) erfordert eine Messvorschrift.

Messung von Abstand und Zeit

Gegeben sei ein IS:

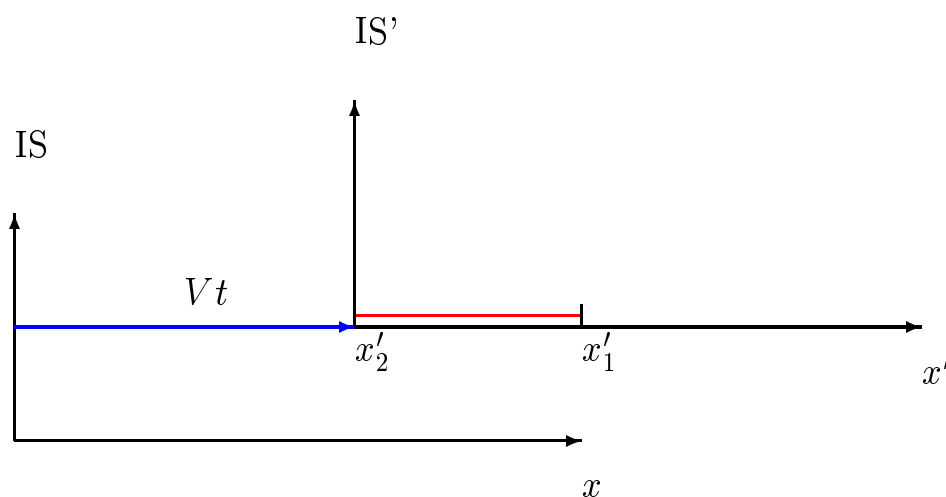
1. Längenmessung mittels in IS ruhenden (Standard-) Maßstabs.
2. Versee IS mit gleichartigen, ruhenden, synchronisierten Uhren.



Etwa: Standarduhr im räumlichen Ursprung O . Sende Lichtsignal von O nach P und mittels Spiegel wieder nach O zurück.

- (a) Messe $2\Delta t$ mit Hilfe der Uhr in O .
- (b) Da c konstant, auch automatisch Abstandsmessung in IS: $\overline{OP} = c\Delta t$.
- (c) Synchronisation von Uhr in P mit Uhr in O durch Emission eines Signals zur Zeit t mit Information: Stelle Uhr bei Ankunft des Signals auf $t + \Delta t$.

Längenkontraktion



1. IS' bewegt sich relativ zu IS mit Vt in (gemeinsamer) x -Richtung.
2. Ein Stab ruht in IS':
 - Stabanfang bei x'_1 ,
 - Stabende bei $x'_2 < x'_1$,
 - Ruhe- oder Eigenlänge: $l_0 = x'_1 - x'_2$.
3. Bestimmung der Länge in IS:

2 Beobachter markieren zur gleichen IS-Zeit (Teil der Messvorschrift), o. B. d. A. $t = 0$, die Position von Stabanfang und -ende auf x -Achse.
4. Verknüpfung der Messungen

	IS	IS'
Ereignis 1	$x_1, t_1 = 0$	$x'_1 = l_0, t'_1$
Ereignis 2	$x_2 = 0, t_2 = 0$	$x'_2 = 0, t'_2 = 0$

Zusammenhang zwischen Koordinaten (siehe Gl. (4.6))

$$l_0 = x'_1 = -\gamma\beta ct_1 + \gamma x_1 = \gamma x_1.$$

Länge des Stabes für Beobachter in IS:

$$l = x_1 - x_2 = \frac{l_0}{\gamma} - 0 = \frac{l_0}{\gamma}.$$

5. Längenkontraktion (Stab parallel zu Geschwindigkeit der Relativbewegung der Systeme):

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \leq l_0.$$

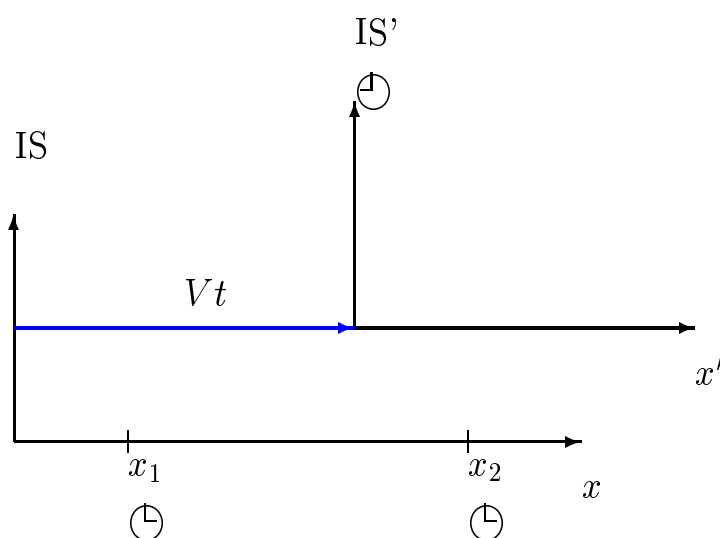
Relativistischer Effekt.

6. Allgemein: Senkrechte Richtungen nehmen an spezieller Lorentz-Transformation nicht teil:

$$l_{\parallel} = l_{0\parallel} \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}, \quad l_{\perp} = l_{0\perp}.$$

7. Beachte: Die Messung eines in IS ruhenden Stabes der Länge l_0 ergibt in IS' mit der analogen Messvorschrift (Gleichzeitigkeit in IS') ebenfalls $l = l_0/\gamma$.
8. Beachte: Gleichzeitigkeit des Messvorgangs in IS bedeutet i. Allg. nicht Gleichzeitigkeit in IS'.

4.4.5 Zeitdilatation



1. IS' bewegt sich relativ zu IS mit Vt in (gemeinsamer) x -Richtung.
2. System IS mit synchronisierten Uhren.
3. 2 Beobachter in IS notieren Zeitpunkt, wann IS'-Uhr (im Ursprung von IS') bei ihnen vorbeikommt und lesen IS'-Zeit ab.
4. Verknüpfung der Messungen

	IS	IS'
Ereignis 1	$x_1 = 0, t_1 = 0$	$x'_1 = 0, t'_1 = 0$
Ereignis 2	$x_2 = Vt_2, t_2$	$x'_2 = 0, t'_2$

Zusammenhang zwischen Koordinaten (siehe Gl. (4.6))

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{V}{c} \frac{x_2}{c} \right) = \gamma \left(t_2 - \frac{V}{c} \frac{Vt_2}{c} \right) = \gamma(1 - \beta^2)t_2 = \frac{t_2}{\gamma}.$$

Bewegte Uhr des IS' geht gegenüber IS-Uhren nach:

$$t_2 - t_1 =: t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} := \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

5. Zeitdilatation oder relativistische Zeitdehnung.

4.4.6 Maximale Geschwindigkeit

Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c ist die größte Übertragungsgeschwindigkeit für Signale und Informationen.

Voraussetzung: Kausalität und Lorentz-Transformationen.

Forderung: Orthochrone Lorentz-Transformationen ändern zeitliche Abfolge von Ursache und Wirkung nicht.

Begründung in 1+1 Dimensionen:

1. Ereignis 1 (P): Am Ort x_1 wird zur Zeit t_1 ein Signal abgestrahlt (IS-Koordinaten).
2. Ereignis 2 (Q): Das Signal wird an einem anderen Ort x_2 zur **späteren** Zeit t_2 empfangen. Damit ist eine Konvention für die Zeitrichtung in IS festgelegt.
3. Kausalitätsprinzip: Die Zeit von P muss in **allen** ISen, die durch eine orthochrone Lorentz-Transformation aus IS hervorgehen, kleiner sein als die Zeit von Q , andernfalls würde die Wirkung vor der Ursache eintreten.
4. Betrachte IS'

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \underbrace{\gamma}_{\geq 1, \text{ orthochron}} (t_2 - t_1) - \beta \gamma \frac{x_2 - x_1}{c} \\ &= \gamma(t_2 - t_1) \left[1 - \beta \frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)} \right]. \end{aligned}$$

Definiere

$$\nu := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \frac{1}{c}.$$

ν : Signalgeschwindigkeit in IS in Einheiten von c .

Kausalität $\Rightarrow$

$$t_2 - t_1 > 0 \wedge t'_2 - t'_1 > 0 \Rightarrow 1 - \beta\nu > 0 \forall -1 < \beta < 1.$$

D. h.

$$1 > \beta\nu.$$

$$(a) \beta \rightarrow 1 \Rightarrow 1 > \nu.$$

$$(b) \beta \rightarrow -1 \Rightarrow 1 > -\nu \Rightarrow -1 < \nu.$$

$$(c) \text{ Zusammengefasst zu } -1 < \nu < 1.$$

4.4.7 Abstandsbegriff und Minkowski-Diagramm

Betrachte Ereignisse P und Q mit Koordinaten

$$(t_1, x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad (t_2, y_1, y_2, y_3)$$

bzgl. KS. Der (verallgemeinerte) Abstand

$$\begin{aligned} s_{12} &= s(P, Q) \\ &= \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 - (y_3 - x_3)^2} \\ &= s(Q, P) \\ &= s_{21} \end{aligned} \tag{4.8}$$

ist invariant bzgl. der Poincaré- oder inhomogenen Lorentz-Transformationen

$$x'_i = \Lambda_{ij}x_j - a_i, \tag{4.9}$$

wobei

$$\Lambda \in L, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Bemerkung: Gl. (4.9) ersetzt die Galilei-Transformationen.

Definition: Der Abstand zweier Ereignisse heißt

$$\left. \begin{array}{l} \text{zeitartig,} \\ \text{lichtartig,} \\ \text{raumartig,} \end{array} \right\} \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{l} s_{12}^2 > 0, \\ s_{12}^2 = 0, \\ s_{12}^2 < 0. \end{array} \right.$$

Definiere

$$t_{12} := t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad l_{12}^2 := (\vec{y} - \vec{x})^2,$$

Poincaré-Invarianz:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

1. Zeitartiger Abstand $\Leftrightarrow$ Existiert KS' mit $l_{12}' = 0$, d. h. Ereignisse finden in KS' an ein und demselben Raumpunkt zu verschiedenen Zeiten statt:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

In KS' vergeht Zeit

$$t_{12}' = \frac{s_{12}}{c}$$

zwischen den beiden Ereignissen (so genannte Eigenzeit).

Bemerkung: Ereignisse an ein und demselben Körper besitzen immer zeitartige Abstände.

Für zeitartige Abstände ist ein kausaler Zusammenhang möglich. Da

$$\frac{l_{12}^2}{t_{12}^2} < c^2,$$

kann – muss aber nicht – das frühere Ereignis das spätere Ereignis auslösen.

2. Lichtartiger Abstand: $s_{12} = 0$. Nur ein sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitendes Signal kann einen kausalen Zusammenhang herstellen.
3. Raumartiger Abstand $\Leftrightarrow$ Existiert KS' mit $t_{12}' = 0$, d. h. Ereignisse finden in KS' an verschiedenen Raumpunkten zum gleichen Zeitpunkt statt:

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

s_{12} ist imaginär. Räumliche Entfernung in KS'

$$l_{12}' = \sqrt{-s_{12}^2}.$$

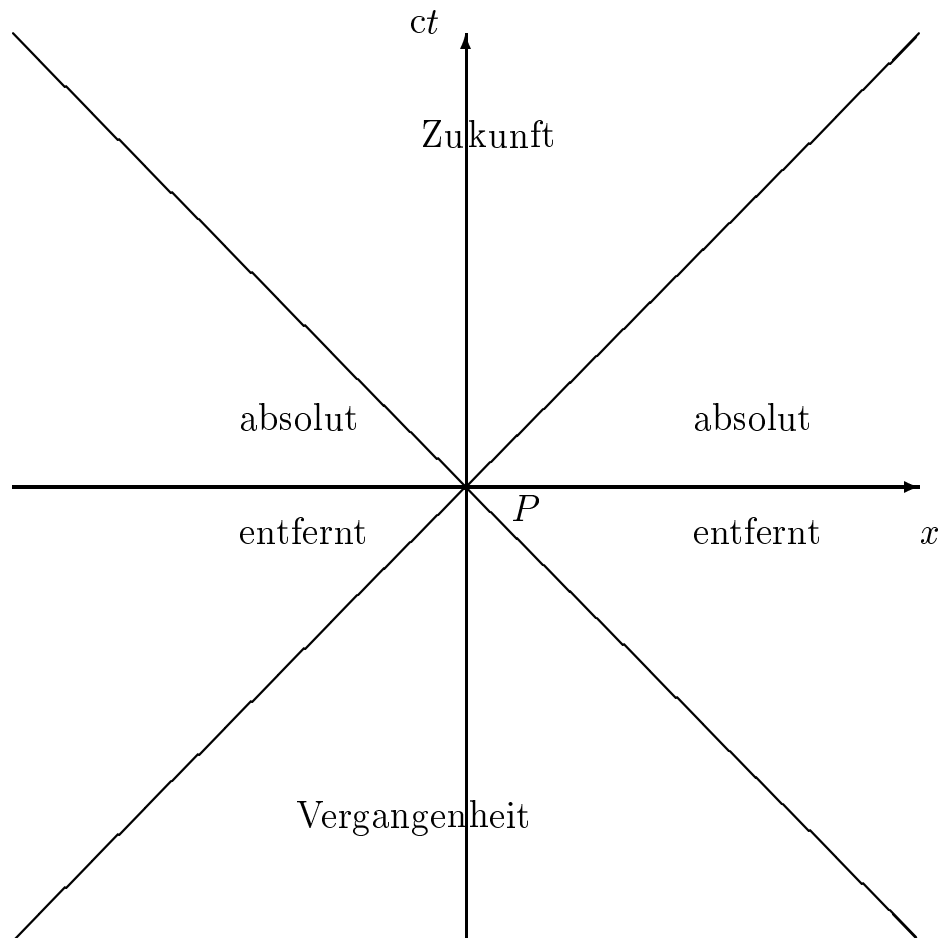
Da

$$\frac{l_{12}^2}{t_{12}^2} > c^2,$$

ist ein kausaler Zusammenhang nicht möglich.

4. Unterteilung der Abstände in zeitartige, raumartige und lichtartige ist absolut, da Eigenschaft nicht vom IS abhängt.

Darstellung in einem Minkowski-Diagramm



1. Ereignis P im Ursprung $(0, 0)$.
2. Diagonalen beschreiben Ausbreitung von Licht. Im $(1+3)$ -dimensionalen Fall: Lichtkegel.
3. Weltpunkte Q im Zukunftskegel (absolute Zukunft) können von P kausal beeinflusst werden: $|x/(ct)| \leq 1$.

4. Welpunkte Q im Vergangenheitskegel (absolute Vergangenheit) können P kausal beeinflusst haben: $|x/(ct)| \leq 1$.
5. Welpunkte der beiden anderen Bereiche (absolut entfernt, manchmal auch Gegenwart genannt, da raumartig) sind ohne kausale Verbindung zu P : $|x/(ct)| > 1$.

4.4.8 Eigenzeit

Beobachte von irgendeinem IS KS aus eine Uhr, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bewegt. Betrachte infinitesimales Zeitintervall $[t_0, t_0 + dt]$ in KS. $\vec{v}(t_0)$ ist momentane Geschwindigkeit (konstant). In KS zurückgelegte Strecke

$$\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}.$$

F: Welches Zeitintervall zeigt bewegte Uhr an?

KS' sei mit Uhr verbundenes Koordinatensystem (i. Allg. kein IS). In KS' gilt

$$dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0.$$

Invarianz des (verallgemeinerten) Abstands

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2 dt'^2.$$

$\Rightarrow$

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{c^2 dt^2}}.$$

Wegen

$$\vec{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \dots$$

gilt

$$\boxed{d\tau := dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}},} \quad (4.10)$$

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}} \leq \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1. \quad (4.11)$$

1. Definition: Eigenzeit = Zeit, die von einer Uhr, die sich mit dem Körper mitbewegt, gemessen wird.

2. Invariant unter Poincaré-Transformationen.
3. Eigenzeit eines sich bewegenden Gegenstandes ist immer kleiner als entsprechendes Zeitintervall im unbewegten System.
4. Physikalische Konsequenz: In der Atmosphäre produzierte instabile Teilchen kommen an der Erdoberfläche an.

4.5 Vierervektoren und Tensoren

4.5.1 Vierervektoren

Notation:

$$\begin{aligned}
 x^0 &:= ct, \\
 x^1 &:= x \quad (\text{bisher } x_1), \\
 x^2 &:= y \quad (\text{bisher } x_2), \\
 x^3 &:= z \quad (\text{bisher } x_3).
 \end{aligned}$$

Fasse Koordinaten eines Weltpunktes bzgl. IS als Komponenten eines vierdimensionalen Vektors auf.

Schreibe Minkowski-Metrik in der Form

$$\begin{aligned}
 M(x, x) &= x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} \\
 &= x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \\
 &= x_\mu x^\mu
 \end{aligned}$$

mit

1. $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$ und $x_3 = -x^3$;
2. x^μ heißen die kontravarianten Komponenten,
 x_μ kovariante;
 Schreibe x oder (x^μ) für Vierervektor.
3. ab jetzt: Griechische Buchstaben für Indizes, die Werte 0,1,2,3 annehmen;

4. Einstein'sche Summenkonvention:

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert: In jedem Paar gleicher Indizes muss einer oben und einer unten stehen.

5. Indizes lassen sich mittels

$$\begin{aligned}x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\nu, \\x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu\end{aligned}$$

heben oder senken. Der metrische Tensor (siehe folgenden Abschnitt) G besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu}, \\g_{00} &= 1 = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}, \\g_{\mu\nu} &= 0 \text{ für } \mu \neq \nu.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Die Werte für $g^{\mu\nu}$ stimmen mit denen für $g_{\mu\nu}$ überein.

6. Wichtig: Konsistentes Indexbild, d. h. auf beiden Seiten eines Gleichheitszeichens müssen dieselben freien Indizes auftauchen und dieselbe Lage haben.

4.5.2 Lorentz-Tensoren

Transformationsverhalten für kontravariante und kovariante Komponenten

Betrachte zwei ISe KS und KS'. Die Transformation werde durch

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}\tag{4.13}$$

für kontravariante Komponenten spezifiziert, mit der Definition

$$\begin{aligned}\Lambda^0{}_0 &:= \text{„altes“ } \Lambda_{00}, \\ \Lambda^0{}_1 &:= \text{„altes“ } \Lambda_{01}, \\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\Lambda &= L(\beta \hat{e}_x) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma =: \Lambda^0_0 & -\beta\gamma =: \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

Vereinbarung für Symbolik:

$$\boxed{\Lambda_\mu{}^\nu := \Lambda^{-1}{}^\nu{}_\mu.} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1} &= L(-\beta \hat{e}_x) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma = \Lambda^{-1}{}^0{}_0 =: \Lambda_0^0 & \beta\gamma = \Lambda^{-1}{}^0{}_1 =: \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

Beachte: Reihenfolge und Stellung der Indizes entscheidend.

Für die kovarianten Komponenten gilt

$$\boxed{x'_\mu = x_\nu \Lambda^{-1}{}^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu.} \quad (4.15)$$

Begründung:

$$x'_\mu = g_{\mu\rho} x'^\rho = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma = \underbrace{g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}}_{\Lambda_\mu{}^\nu} x_\nu \stackrel{*}{=} x_\nu \Lambda^{-1}{}^\nu{}_\mu.$$

*: $\Lambda^{-1} = G\Lambda^T G$ (**Übung 11**). Verwende alte Schreibweise mit $\nu = i$ und $\mu = j$:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}{}^\nu{}_\mu &= \Lambda^{-1}{}_{ij} = (G\Lambda^T G)_{ij} = G_{ik} \Lambda^T_{kl} G_{lj} \\ &= G_{ik} \Lambda_{lk} G_{lj} = G_{jl} \Lambda_{lk} G_{ki} = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu} =: \Lambda_\mu{}^\nu.\end{aligned}$$

Fazit: Vereinfachung der Schreibweise.

Definition Lorentz-Tensor

Ein Lorentz-Tensor T n -ter Stufe besitzt 4^n Elemente:

$$\begin{aligned}\text{kontravariante Komp. : } & t^{\lambda \cdots \mu \cdots \nu}, \\ \text{kovariante Komp. : } & t_{\lambda \cdots \mu \cdots \nu}, \\ \text{gemischte Komp. : } & t^{\lambda \cdots}_{\mu \cdots \nu}.\end{aligned}$$

Transformationsverhalten unter $KS \rightarrow KS'$ ($x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$) für $n = 2$:

$$\begin{aligned}t'^{\rho\sigma} &= \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu t^{\mu\nu}, \\ t'_{\rho\sigma} &= \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu t_{\mu\nu} \quad (= t_{\mu\nu} \Lambda^{-1\mu}_\rho \Lambda^{-1\nu}_\sigma), \\ t'^\rho_\sigma &= \Lambda^\rho_\mu \Lambda_\sigma^\nu t^\mu_\nu.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Verallgemeinerung auf n Komponenten klar.

Heben und Senken von Indizes durch metrischen Tensor:

$$g^{\mu\rho} t^{\lambda \cdots}_{\rho \cdots \nu} = t^{\lambda \cdots \mu \cdots \nu}.$$

1. Betrachte Spezialfall eines symmetrischen Tensors 2. Stufe:

$$s^{\mu\nu} = s^{\nu\mu}, \quad \text{z. B.} \quad x^\mu x^\nu.$$

Dann gilt

$$s_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} s^{\rho\nu} = g_{\mu\rho} s^{\nu\rho} = s^\nu{}_\mu.$$

Deshalb existiert für diesen Spezialfall die Schreibweise

$$s^\nu{}_\mu = s_\mu{}^\nu = s^\nu{}_\mu.$$

2. Regeln zur Erzeugung weiterer Tensoren analog zu Abschnitt 3.2.5.

Bsp.: Jede Verjüngung erniedrigt Stufe des Tensors um 2:

$$\begin{aligned}t^{\mu \cdots \nu \rho \cdots \sigma} &: \quad n \text{ freie Indizes,} \\ g_{\nu\rho} t^{\mu \cdots \nu \rho \cdots \sigma} &: \quad n - 2 \text{ freie Indizes.}\end{aligned}$$

3. Λ^μ_ν und $\Lambda_\mu{}^\nu$ sind keine gemischten Komponenten eines Tensors. Schreibweise vielmehr an konsistentes Indexbild angepasst.

Invariante Tensoren

Der metrische Tensor (oder Minkowski-Tensor)

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu},$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

mit der Darstellung in Matrixform

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist ein invarianter Tensor:

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma g^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^\nu_\sigma \Lambda^\mu_\rho g^{\rho\sigma} = g^{\mu\tau} \Lambda^\nu_\sigma \Lambda_\tau^\sigma = g^{\mu\tau} \underbrace{\Lambda^\nu_\sigma \Lambda^{-1\sigma}_\tau}_{\delta_\tau^\nu} \\ &= g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir vom Kronecker-Symbol (Delta-Tensor) Gebrauch gemacht:

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Beachte:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= g^{\nu\mu} \Rightarrow g^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu = g_\nu^\mu, \\ g^\mu{}_\nu &= g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu. \end{aligned}$$

Der vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor mit den kovarianten Komponenten

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein (Pseudo-) Tensor 4. Stufe. Begründung analog zu Abschnitt 3.2.8, jetzt nur für (4, 4)-Matrizen.

Bemerkung: Wie bei $O(3)$ unterscheiden sich Pseudotensoren um einen zusätzlichen Faktor $\det(\Lambda)$ beim Transformationsverhalten.

4.5.3 Lorentz-Tensorfelder

Tensorfelder: Komponenten sind Funktionen von x .

Betrachte Funktionen $S(x)$, $V^\mu(x)$ und $T^{\mu\nu}(x)$. Es handelt sich dabei um ein skalares Feld, (Vierer-) Vektorfeld (genauer: kontravariante Komponenten eines Lorentz-Tensorfeldes 1. Stufe), Tensorfeld (2. Stufe), falls

$$\begin{aligned} S'(x') &= S(x), \\ V'^\mu(x') &= \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x), \\ T'^{\mu\nu}(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \end{aligned}$$

mit

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Definition für Tensorfelder höherer Stufe analog.

Anwendung einer partiellen Ableitung auf Tensorfeld n -ter Stufe $\Rightarrow$ Tensorfeld $(n+1)$ -ter Stufe.

Behauptung: $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ transformiert wie kovariante Komponente eines Vektors.

Begründung:

$$\begin{aligned} x'^\rho &= \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma \quad \Rightarrow \quad x^\nu = \Lambda^{-1\nu}{}_\rho x'^\rho = \Lambda_\rho{}^\nu x'^\rho \\ & \quad [= \underbrace{\Lambda_\rho{}^\nu \Lambda^\rho{}_\sigma}_{\delta_\sigma^\nu} x^\sigma = x^\nu]. \\ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Lambda_\rho{}^\nu x'^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= \Lambda_\rho{}^\nu \delta_\mu^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad [= \Lambda^{-1\nu}{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}]. \end{aligned}$$

Analog für $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Zusammengefasst zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ \frac{\partial}{\partial x'_\mu} &= \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \end{aligned}$$

Nützliche Schreibweise:

$$\boxed{\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu}.} \quad (4.17)$$

Unterstreicht kovarianten/kontravarianten Charakter.

Anwendung: Elektromagnetisches Viererpotenzial

$$(A^\mu(x)) = (\Phi(x), \vec{A}(x)). \quad (4.18)$$

Elektromagnetischer Feldstärketensor mit kontravarianten Komponenten:

$$F^{\mu\nu}(x) := \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (4.19)$$

1. Antisymmetrischer Tensor 2. Stufe;

2. 6 unabhängige Komponenten: elektrisches und magnetisches Feld.

3. Beachte Faktoren von c.

Illustration: $A^1(x) = A_x(\vec{x}, t)$, z. B.

$$\begin{aligned} A_x(\vec{x}, t) &= ax t = \frac{ax^1 x^0}{c} = A^1(x), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial A_x(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \frac{ax}{c} \\ &= \partial^0 A^1(x) = \frac{\partial A^1(x)}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \underbrace{g^{00}}_1 x_0 \frac{ax^1}{c} \\ &= \frac{ax^1}{c}. \end{aligned}$$

4.5.4 Postulat der speziellen Relativität

Die Naturgesetze sind unter der Poincaré-Gruppe invariant.

Forminvarianz (d. h. Kovarianz) wird durch die Formulierung als Lorentz-Tensorgleichungen gewährleistet (Begründung analog zu Abschnitt 3.4).

4.6 Relativistische Dynamik

F: Wie sehen relativistische Verallgemeinerungen von Kraft, Energie und Impuls aus?

4.6.1 Relativistisches Kraftgesetz

Gegeben: Bewegtes Teilchen, das sich mit (momentaner) Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu IS KS bewegt.

KS_R sei momentanes Ruhesystem. Wähle Achsen von KS_R $\parallel$ zu Achsen von KS $\Rightarrow$ spezielle Lorentz-Transformation

$$\text{KS} \xrightarrow{L(\vec{\beta})} \text{KS}_R$$

mit

$$L(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & & & \\ -\beta_2\gamma & & (L_{kl}) & \\ -\beta_3\gamma & & & \end{pmatrix},$$

$$L_{kl} = \delta_{kl} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \beta_k \beta_l \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 < 1,$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Momentan bedeutet, dass die Parameter von t (oder τ) abhängig sind.

Gesucht: Relativistische Verallgemeinerung von Newton II:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Zwei wesentliche Bedingungen

1. Forminvarianz der Bewegungsgleichung bzgl. aller eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen (Bewegungsgl. kovariant, Tensorgl.).
2. Im Ruhesystem des Teilchens, ebenso wie im Falle sehr kleiner Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c$ muss die Bewegungsgl. in N II übergehen.

Beschreibe Bahnkurve eines Massenpunktes in KS durch

$$x^i = x^i(t) \quad \text{oder} \quad x^\mu(\tau).$$

Information ist äquivalent, denn:

$$\begin{aligned} \tau : & \quad \text{Eigenzeit,} \\ d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}, \\ x^i(t) &\Rightarrow v^i(t) = \frac{dx^i}{dt} \Rightarrow t = t(\tau), \\ &\Rightarrow x^0 = ct(\tau), \quad x^i = x^i(\tau). \end{aligned}$$

Vierergeschwindigkeit (Verallgemeinerung von v^i)

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}} \quad (4.20)$$

Beachte

$$\begin{aligned} (dx^\mu) : & \quad \text{Vierervektor,} \\ d\tau : & \quad \text{Lorentz-Skalar,} \\ \Rightarrow & \quad \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \text{ ist Vierervektor.} \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

gilt

$$(u^\mu) = \gamma \left(\underbrace{\frac{dx^0}{dt}}_c, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) = \frac{(c, v^1, v^2, v^3)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma(c, \vec{v}). \quad (4.21)$$

Ansatz für relativistisches Kraftgesetz:

$$\boxed{m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) = f^\mu.} \quad (4.22)$$

m : Masse im Ruhesystem, Ruhemasse (innere Eigenschaft des Teilchens, Lorentz-Skalar).

Linke Seite: Komponente eines Vierervektors $\Rightarrow (f^\mu)$ Vierervektor (Kovarianz).

Betrachte Kraft in KS_R (Index R für Ruhesystem):

$$\begin{aligned} f_R^0 &= 0, \\ \vec{f}_R &= \vec{F}. \end{aligned}$$

Kraft in KS (Rücktransformation)

$$f^\mu = L^\mu{}_\nu(-\vec{\beta}) f_R^\nu$$

Minkowski-Kraft (f^μ) : Aus dem Ruhesystem „angeschobene“ Newton'sche Kraft $(0, \vec{F})$.

4.6.2 Energie und Impuls

Ansatz für relativistisches Analogon zum Impuls $\vec{p}$:

$$p^\mu := m \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}. \quad (4.23)$$

Ruhesystem KS_R :

$$(p_R^\mu) = (mc, \vec{0}), \quad m \text{ Ruhemasse.}$$

Komponenten in KS:

$$\begin{aligned} p^\mu &= L^\mu{}_\nu(-\vec{\beta}) p_R^\nu, \\ (p^\mu) &= (\gamma mc, \gamma m \vec{v}). \end{aligned}$$

Konsistent mit m · Gl. (4.21).

„Bewegte“ Masse:

$$\begin{aligned} m(\vec{v}) &:= m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}, \\ m(\vec{v}) &\rightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } |\vec{v}| \rightarrow c, \\ m & \text{für } |\vec{v}| \rightarrow 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Setze

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \text{mit} \quad E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (4.24)$$

Es gilt die Massenschalenbeziehung

$$p^2 := p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (\gamma mc)^2 - (\gamma m \vec{v})^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^2.$$

Relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (4.25)$$

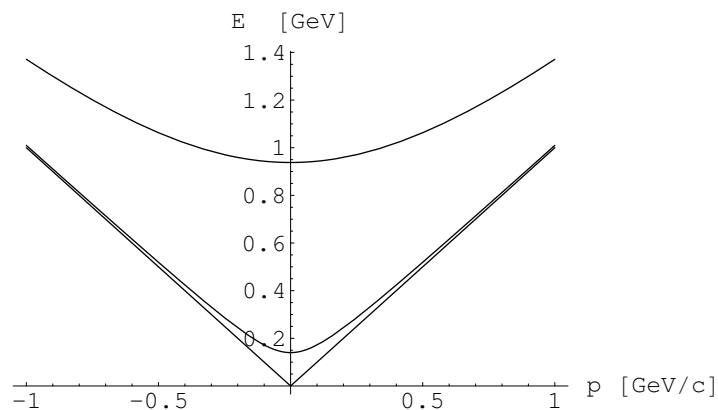
1. $\vec{p} = 0$: $E = mc^2$; Ruheenergie eines freien Teilchens.

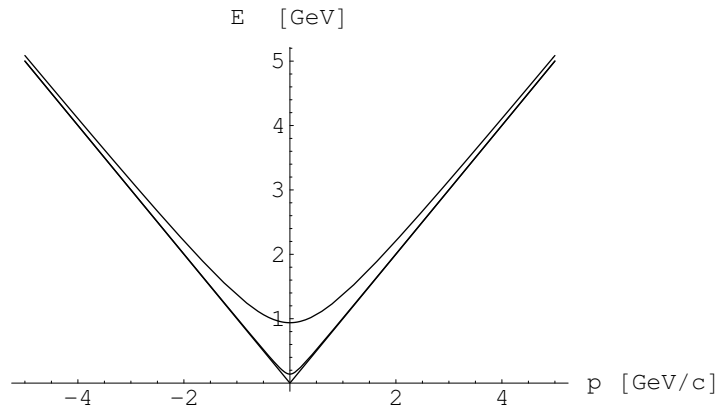
2. $|\vec{p}c| \gg mc^2$: $E \rightarrow |\vec{p}|c$.

3. Masseloses Teilchen: $E = |\vec{p}|c$.

4. Energie-Impulsspektrum

- Einheiten: 1 eV ($= 1,602 \cdot 10^{-19}$ J) entspricht Energiezunahme eines Elektrons beim Durchlaufen einer Potenzialdifferenz von 1 V. 1 GeV = 10^9 eV.
- Ruhemasse des Protons: $M_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
- Ruhemasse des geladenen Pions: $M_{\pi^+} = 0.140 \text{ GeV}/c^2$.





5. Kinetische Energie $T := E - mc^2$.

Übung 12: Für $|\vec{p}|c \ll mc^2$ gilt

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} + \dots \right).$$

4.6.3 Konsequenzen aus Energie- und Impulserhaltung

Spezielle Relativitätstheorie + Feldtheorie + Quantenmechanik $\Rightarrow$ Quantenfeldtheorie: Beschreibung für Erzeugung und Vernichtung/Zerfall von Teilchen.

Hier: Keine Dynamik (explizite Angabe von Wechselwirkung), nur Konsequenzen aus Energie- und Impulserhaltung.

1. Zerfall eines Teilchens in n Teilchen

(a) Zweikörperzerfall

- $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$: Zerfall eines positiv geladenen Pions in ein (Anti-) Myon und ein Myonneutrino (schwache Wechselwirkung).
- $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$: Zerfall eines neutralen Pions in zwei Photonen (elektromagnetische Wechselwirkung).
- $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$: Zerfall der zweifach geladenen Deltaresonanz in ein Proton und ein Pion (starke Wechselwirkung).

Viererimpulserhaltung:

$$P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu.$$

Ruhesystem des zerfallenden Teilchens = Schwerpunktsystem (engl.: cm für center of mass) der beiden Zerfallsprodukte:

$$\begin{aligned} Mc^2 &= E_1 + E_2, \\ 0 &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|. \end{aligned}$$

Wähle so genannte natürliche Einheiten $c=1$:

$$\begin{aligned} M &= E_1 + E_2 \quad \Rightarrow \\ E_1^2 &= (M - E_2)^2 \quad \Rightarrow \\ m_1^2 + \vec{p}_1^2 &= M^2 - 2ME_2 + \underbrace{E_2^2}_{m_2^2 + \vec{p}_2^2} \quad \Rightarrow \\ m_2^2 + \vec{p}_2^2 &= m_2^2 + \vec{p}_1^2 \\ 2ME_2 &= M^2 + m_2^2 - m_1^2 \quad \Rightarrow \\ E_2 &= \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \quad \Rightarrow \\ m_2^2 + \vec{p}_2^2 &= \left(\frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \right)^2 \quad \Rightarrow \\ \vec{p}_2^2 &= \frac{M^4 + 2M^2(m_2^2 - m_1^2) + (m_2^2 - m_1^2)^2 - 4M^2m_2^2}{4M^2} \\ &= \frac{M^4 - 2M^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}{4M^2} \\ &= \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}{4M^2}. \end{aligned}$$

- i. Fazit: Im Zweikörperzerfall ist die Kinematik vollständig durch die Massen der beteiligten Teilchen bestimmt.

Füge c wieder ein:

$$\boxed{\vec{p}_1^2 = \vec{p}_2^2 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}{4M^2}c^2.}$$

- ii. Zerfall kann nur für $m_1 + m_2 \leq M$ stattfinden.
iii. Spezialfälle:

- $m_1 = m_2 = m$:

$$\frac{M^2 - 4m^2}{4}c^2.$$

- $m_2 = 0$:

$$\frac{(M^2 - m_1^2)^2}{4M^2}c^2.$$

- $m_1 = m_2 = 0$:

$$\left(\frac{Mc}{2}\right)^2.$$

(b) Berühmtes Beispiel für Dreikörperzerfall:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

1930: Pauli postuliert weiteres Teilchen, um den „Energiesatz zu retten“, da kontinuierliches β -Spektrum im Gegensatz zu scharfem Impuls beobachtet wird.

2. Produktion eines schweren Teilchens

$$p_1^\mu + p_2^\mu = P^\mu.$$

(a) Teilchenstrahl trifft auf festes Target:

$$\begin{aligned} M^2 c^2 = P^2 &= p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \\ &= m_1^2 c^2 + 2m_1 E_2 + m_2^2 c^2 \\ \Rightarrow E_2 &= \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1} c^2 \sim M^2. \end{aligned}$$

(b) Kollision zweier Strahlen:

$$E_1 + E_2 = Mc^2.$$

3. Elastische Streuung und Produktion von Teilchen (siehe Übung 12).

Pionphotoproduktion: $\gamma(k) + p(p_i) \rightarrow \pi^0(q) + p(p_f)$.

(a) Viererimpulserhaltung

$$k^\mu + p_i^\mu = q^\mu + p_f^\mu. \quad (4.26)$$

Tensorgleichung: Gilt in allen ISen.

- i. $c=1$;
- ii. $M := M_p = 938 \text{ MeV}$;
- iii. $m := M_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$.

(b) Definition

- i. Laborsystem (LS): Target in Ruhe, d. h.

$$\vec{p}_i = 0. \quad (4.27)$$

- ii. Schwerpunktsystem (SPS):

$$\vec{k}^* + \vec{p}_i^* = \vec{q}^* + \vec{p}_f^* = 0. \quad (4.28)$$

Konvention: Indiziere Komponenten von Vierervektoren im SPS mit $*$.

(c) Definition

$$s = (p_i + k)^2 = (p_f + q)^2.$$

Auswerten im SPS:

$$s = (E_i^* + E_\gamma^*)^2 = (E_f^* + E_\pi^*)^2.$$

Interpretation: $\sqrt{s}$ ist Gesamtenergie im SPS.

- i. Zusammenhang zwischen s und LS-Photonenergie:

$$s = (p_i + k)^2 = (M + E_\gamma)^2 - \underbrace{\vec{k}_\gamma^2}_{E_\gamma^2} = M^2 + 2ME_\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\gamma = \frac{s - M^2}{2M}}.$$

- ii. Zusammenhang zwischen s und SPS-Photonenergie:

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= E_i^* + E_\gamma^* \Rightarrow \\ E_i^* &= \sqrt{s} - E_\gamma^* \Rightarrow \\ E_i^{*2} &= M^2 + E_\gamma^{*2} = s - 2\sqrt{s}E_\gamma^* + E_\gamma^{*2} \\ \Rightarrow &\boxed{E_\gamma^* = \frac{s - M^2}{2\sqrt{s}}}. \end{aligned}$$

- iii. Schwellenproduktion (engl. threshold production):
Im SPS steht genau so viel Energie zur Verfügung,
um das Pion in Ruhe zu erzeugen,

$$s|_{\text{thr}} = (M + m)^2.$$

A. LS

$$\begin{aligned} E_{\gamma\text{thr}} &= \frac{(M + m)^2 - M^2}{2M} = \frac{2Mm + m^2}{2M} \\ &= \left(1 + \frac{m}{2M}\right) m > m. \end{aligned}$$

Ein Teil der Photonenergie geht in den Rückstoß des Proton-Pion-Systems.

Beachte: Im LS gilt

$$\vec{k} = \vec{q} + \vec{p}_f,$$

d. h. Proton und Pion bewegen sich.

B. SPS

$$\begin{aligned} E_{\gamma\text{thr}}^* &= \frac{(M + m)^2 - M^2}{2(M + m)} = \frac{2Mm + m^2}{2M + 2m} \\ &= \frac{1 + \frac{m}{2M}}{1 + \frac{m}{M}} m < m. \end{aligned}$$

Wegen der kinetischen Energie des Protons im Anfangszustand ist die benötigte Photonenergie im SPS kleiner als m .

(d) Lorentz-Transformation vom LS zum SPS:

Laborsystem

Schwerpunktsystem

$$\vec{k} = E_\gamma \hat{e}_z \quad \vec{p}_i = 0$$


$$\vec{k}^* \quad \vec{p}_i^* = -\vec{k}^*$$


SPS bewegt sich mit $\beta \hat{e}_z$ relativ zu LS:

Bestimmung von β :

$$(M, 0, 0, 0) \xrightarrow{L(\beta \hat{e}_z)} (E_i^*, 0, 0, -|\vec{p}_i^*|).$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma M \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma M \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} E_i^* \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}_i^*| \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$\gamma = \frac{E_i^*}{M},$$

$$\beta\gamma = \frac{|\vec{p}_i^*|}{M},$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \frac{|\vec{p}_i^*|}{E_i^*} = \frac{E_\gamma}{\sqrt{s} - E_\gamma} = \frac{s - M^2}{2\sqrt{s}} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{s} - \frac{s-M^2}{2\sqrt{s}}}}^{\frac{2\sqrt{s}}{s+M^2}} = \frac{s - M^2}{s + M^2} \\ &= \frac{M^2 + 2ME_\gamma - M^2}{M^2 + 2ME_\gamma + M^2} \\ &= \frac{E_\gamma}{M + E_\gamma}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\beta = \frac{s - M^2}{s + M^2} = \frac{E_\gamma}{M + E_\gamma}.}$$

- (e) Im Detektor werden die Zerfallsphotonen des π^0 nachgewiesen.

Hier nur Spezialfall der Schwellenproduktion: Vereinfachung, da Pion-Ruhsystem und SPS übereinstimmen.

$\pi^0(q) \rightarrow \gamma(k_1)\gamma(k_2)$ ist Zweikörperzerfall. Betrachtet man (unendlich) viele Zerfälle, so ist die Winkelverteilung im Ruhsystem isotrop (keine Richtung bevorzugt).

Parametrisiere

$$\begin{aligned} \text{Photon 1 : } (k_1^{\mu*}) &= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\theta^*) \cos(\phi^*) \\ \sin(\theta^*) \sin(\phi^*) \\ \cos(\theta^*) \end{pmatrix}, \\ \text{Photon 2 : } (k_2^{\mu*}) &= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(\theta^*) \cos(\phi^*) \\ -\sin(\theta^*) \sin(\phi^*) \\ -\cos(\theta^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Transformation in LS mit $L(-\beta \hat{e}_z)$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\theta^*) \cos(\phi^*) \\ \sin(\theta^*) \sin(\phi^*) \\ \cos(\theta^*) \end{pmatrix} \\ &= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \gamma[1 + \beta \cos(\theta^*)] \\ \sin(\theta^*) \cos(\phi^*) \\ \sin(\theta^*) \sin(\phi^*) \\ \gamma[\beta + \cos(\theta^*)] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fazit: Kugelform aus SPS ist in LS deformiert.

4.6.4 Lorentz-Kraft

Gesucht: Relativistische Schreibweise für Lorentz-Kraft in einem IS KS.

Starte mit Gl. (4.22):

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) = f^\mu.$$

Betrachte Teilchen mit Ladung q in einem elektromagn. Feld. Im momentanen Ruhesystem KS_R wirke Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E}_R$$

mit elektrischer Feldstärke $\vec{E}_R$ im Ruhesystem.

Drücke $\vec{E}_R$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus KS aus (Übung 12, Aufgabe 3):

$$\vec{E}_R = \vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}).$$

$\parallel$ und $\perp$ beziehen sich auf $\vec{\beta}$.

Minkowski-Kraft $f^\mu = L^\mu{}_\nu(-\vec{\beta})f_R^\nu$ in KS aus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta_1\gamma & \beta_2\gamma & \beta_3\gamma \\ \beta_1\gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_1 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_3 \\ \beta_2\gamma & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_3 \\ \beta_3\gamma & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_3\beta_3 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ q[\vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B})] \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} \gamma\vec{\beta} \cdot \vec{E} \\ \vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}) + \underbrace{\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}\vec{\beta} \cdot \vec{E}_\parallel}_{\beta^2\vec{E}_\parallel} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verwende nun

$$\begin{aligned} \gamma^2\beta^2 &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1+\beta^2-1}{1-\beta^2} = \gamma^2 - 1 \quad \Rightarrow \\ 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^2 &= 1 + \frac{\gamma^2-1}{\gamma+1} = 1 + \gamma - 1 = \gamma. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(f^\mu) = \gamma q \begin{pmatrix} \vec{\beta} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Aber: Schreibweise nicht manifest kovariant, d. h. Tensorcharakter nicht direkt ersichtlich.

Deshalb

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (4.30)$$

mit

$$(u^\mu) = (\gamma c, \gamma \vec{v}).$$

Gl. (4.29) und (4.30) sind äquivalent, denn:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$F^{0\nu} u_\nu = \gamma \vec{v} \cdot \vec{E}$$

und

$$\left. \begin{aligned} F^{1\nu} u_\nu &= E_x \gamma c + B_z \gamma v_y - B_y \gamma v_z, \\ F^{2\nu} u_\nu &= E_y \gamma c - B_z \gamma v_x + B_x \gamma v_z, \\ F^{3\nu} u_\nu &= E_z \gamma c + B_y \gamma v_x - B_x \gamma v_y, \end{aligned} \right\} \gamma c (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}).$$

Kapitel 5

Maxwell-Gleichungen

5.1 Kovariante Form

Gegeben sei eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ und eine Stromdichte $\vec{J}(\vec{x}, t)$, zusammengefasst zum Vierervektor

$$(J^\mu(x)) := (c\rho(\vec{x}, t), \vec{J}(\vec{x}, t)) \quad (5.1)$$

mit

$$J'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x), \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (5.2)$$

Gegeben sei außerdem ein elektromagnetisches Viererpotenzial

$$(A^\mu(x)) := (\Phi(\vec{x}, t), \vec{A}(\vec{x}, t)) \quad (5.3)$$

mit Feldstärketensor

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu}(x)) &= (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x(\vec{x}, t) & -E_y(\vec{x}, t) & -E_z(\vec{x}, t) \\ E_x(\vec{x}, t) & 0 & -B_z(\vec{x}, t) & B_y(\vec{x}, t) \\ E_y(\vec{x}, t) & B_z(\vec{x}, t) & 0 & -B_x(\vec{x}, t) \\ E_z(\vec{x}, t) & -B_y(\vec{x}, t) & B_x(\vec{x}, t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inhomogene, mikroskopische (d. h. mit Quellen im Vakuum) Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu.} \quad (5.4)$$

Entspricht (Teil 2, Übung 1, Aufgabe 3)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Definiere dualen Feldstärketensor

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1.} \quad (5.5)$$

Exemplarisch

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{01} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{01\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\epsilon^{0123}}_{-1} \underbrace{F_{23}}_{-B_x} + \underbrace{\epsilon^{0132}}_1 \underbrace{F_{32}}_{B_x}\right) = -B_x, \\ \tilde{F}^{12} &= -\underbrace{\epsilon^{1230}}_{+1} \underbrace{F_{30}}_{-E_z} = E_z. \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\boxed{(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.} \quad (5.6)$$

Beachte

$$(F^{\mu\nu}) \xrightarrow{\vec{E} \mapsto \vec{B} \wedge \vec{B} \mapsto -\vec{E}} (\tilde{F}^{\mu\nu})$$

Homogene, mikroskopische Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.} \quad (5.7)$$

Entspricht (Teil 2, Übung 1, Aufgabe 5)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Gl. (5.7) ist automatisch erfüllt, denn

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0,$$

da $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch unter $\mu \leftrightarrow \rho$ und $\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma$ symmetrisch unter $\mu \leftrightarrow \rho$.

Außerdem impliziert Gl. (5.4) die elektromagnetische Viererstromerhaltung

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0,} \quad (5.8)$$

denn

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{c}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0,$$

da $\partial_\mu \partial_\nu$ symmetrisch unter $\mu \leftrightarrow \nu$ und $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch unter $\mu \leftrightarrow \nu$.

Bemerkungen

1. Maxwell-Gleichungen: Grundgleichungen aller klassischen, elektromagnetischen Phänomene (Elektrodynamik).
2. Nicht beweisbar; Postulat, aufgrund von Schlüsselexperimenten plausibel.
3. Partielle DGLen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.
4. Definition der elektromagnetischen Felder erfolgt über die (Lorentz-) Kraft $\vec{F}$ auf eine Punktladung q :

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}, t) + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t).$$

5. Die Maxwell-Gleichungen (5.4) und (5.7) sind Tensorgleichungen. Sie gelten in allen ISen, die durch Lorentz-Transformationen miteinander verknüpft sind.

5.2 Zusammenstellung Elektro- und Magneto- statik

Statische Phänomene, d. h. keine Zeitabhängigkeit $\Rightarrow$

Elektrostatik	Magnetostatik
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}), \text{ usw.}$$

Trennung in elektrische und magnetische Phänomene.

Aber: Vom Beobachter abhängig, siehe Gl. (5.2) und Teil 1, Übung 12, Aufgabe 3 und 4.

5.2.1 Coulomb-Gesetz und elektrische Feldstärke

Motivation: Coulomb-Kraft zwischen positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen dominiert Erscheinungsform der gewöhnlichen Materie.

Gegeben: Punktladungen/Punktteilchen mit Ladung/Masse q_i/m_i an den Positionen $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2$).

$\vec{F}_{12}$ ist Kraft, die 2 auf 1 ausübt.

Coulomb-Kraft	Gravitation
$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 ^3}$	$\vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 ^3}$

Bemerkungen

1. N III: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
2. Coulomb-Kraft $\sim 1/r^2$.
3. Zentralkraft:
 - (a) Abstoßend, wenn q_1 und q_2 dasselbe Vorzeichen besitzen.
 - (b) Anziehend für entgegengesetztes Vorzeichen.
4. Ladung ist quantisiert, Bausteine der gewöhnlichen Materie besitzen Ladung $+e$ (Proton) und $-e$ (Elektron) (sowie 0 für Neutron).

Quantisierung auf der Ebene des Standardmodells unverständlich.

Ladung ist additiv: Gesamtladung = Summe der einzelnen Ladungen.

Auf einer makroskopischen Skala ist Ladung praktisch kontinuierlich.

5. Größenordnung: Betrachte Elektron und Proton

$$\frac{F_C}{F_G} \approx 2 \cdot 10^{39}.$$

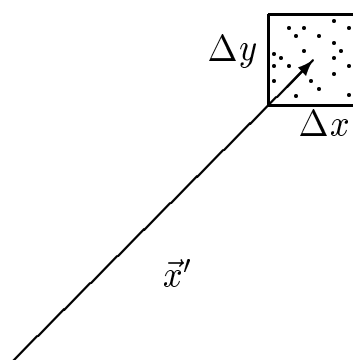
Definition des elektrischen Feldes über Kraft, die auf Testladung q an Position $\vec{x}$ wirkt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})}. \quad (5.9)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip: n Ladungen an den Positionen $\vec{x}_i$ erzeugen das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}. \quad (5.10)$$

Annahme: Sehr viele (idealisierte) Punktladungen $\Rightarrow$ Beschreibung mittels Ladungsdichte.



Δq sei Ladung in kleinem Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ am Punkt $\vec{x}'$:

$$\Delta q = \rho(\vec{x}') \Delta x \Delta y \Delta z.$$

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung $\sum_{i=1}^n q_i \cdots \rightarrow \int d^3x' \rho(\vec{x}') \cdots$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \quad (5.11)$$

5.2.2 Dirac'sche Deltafunktion

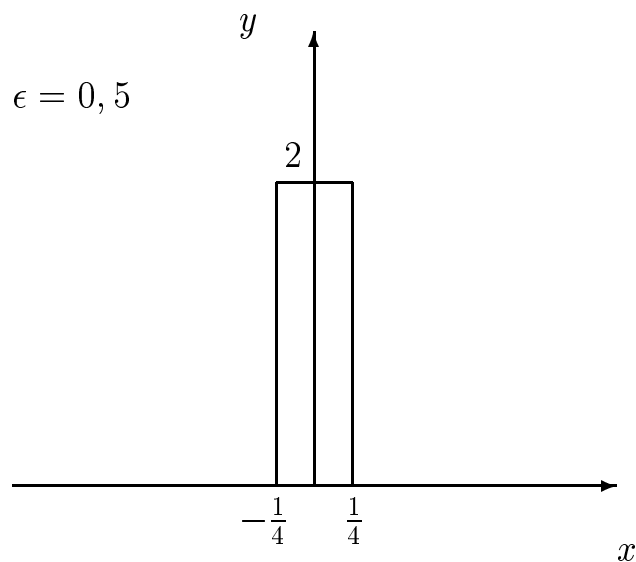
Gesucht: (Verallgemeinerte) Funktion, die so scharf um einen Punkt x_0 lokalisiert ist, dass

$$\int dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0).$$

Rigoros: Theorie der verallgemeinerten Funktionen oder Distributionen.

Intuitiv: Betrachte Funktionenschar ($\epsilon > 0$)

$$d_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Berechne Faltungsintegral

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx d_{\epsilon}(x - x_0) f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\epsilon}{2}} dx f(x) \\ &\stackrel{*}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x})}{\epsilon} \epsilon = f(x_0).\end{aligned}$$

*: Mittelwertsatz der Integralrechnung, $\bar{x} \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$.

Vorsicht: Grenzwert außerhalb des Integrals.

Führe neue Schreibweise ein:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx d_{\epsilon}(x - x_0) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\delta(x - x_0)}_{\text{Dirac'sche Deltafunktion}} f(x) = f(x_0).$$

Eigenschaften

$$1. \delta(x - x_0) = 0 \text{ für } x \neq x_0.$$

2.

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in]a, b[, \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x_0 = a \text{ oder } x_0 = b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Für stetiges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0).}$$

4. Für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0).}$$

5.

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i),$$

unter der Annahme, dass f nur die einfachen Nullstellen x_i besitzt.

6.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

7. $\delta(-x) = \delta(x)$.

8. $\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3)$.

9.

$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\text{Koordinatentransformation}} (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$

$$\text{Jacobi-Matrix } \mathcal{J}_x(\xi) := \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3},$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{|\det(\mathcal{J}_x(\xi))|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3).$$

10. Kugelkoordinaten:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi').$$

11. Zylinderkoordinaten:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(z - z') \delta(\phi - \phi').$$

12. Darstellung:

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ik(x - y)).$$

13. Darstellung $(\phi, \phi' \in [0, 2\pi])$:

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im(\phi - \phi')).$$

14.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x - x_0) f(x) = f(x_0).$$

Etwa:

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \\ \delta_n(x) &= \frac{n \sin(nx)}{\pi nx}. \end{aligned}$$

15. Heaviside-Sprungfunktion:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

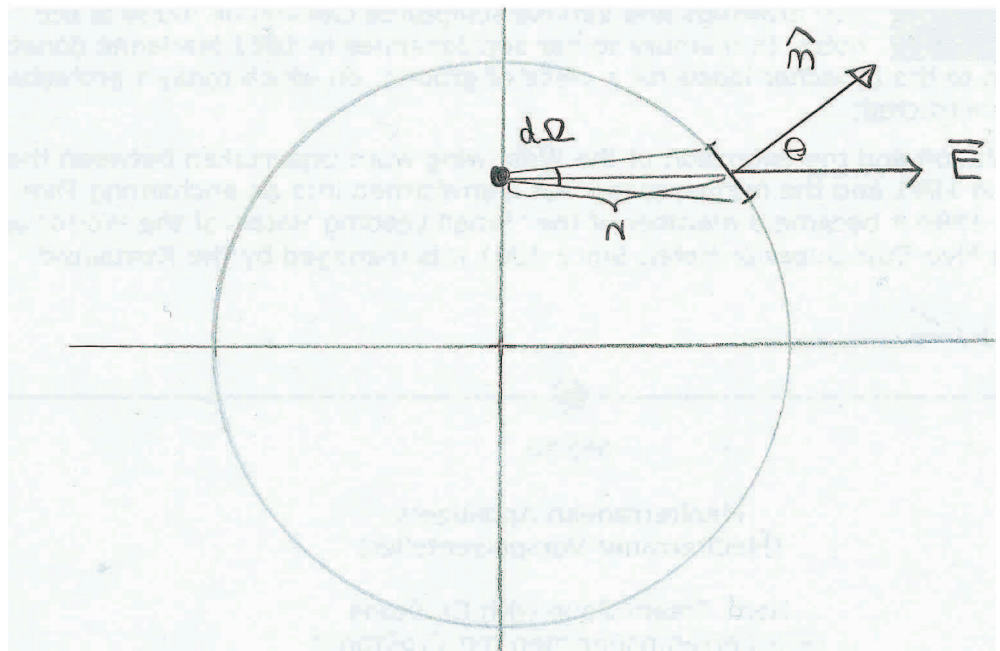
$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x).$$

16. Beispiel: n Punktladungen q_i an den Positionen $\vec{x}_i$.
Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i).$$

5.2.3 Gauß'sches Gesetz

Betrachte Punktladung q und geschlossene Oberfläche S . Kugel (Kreis) nur zwecks Veranschaulichung. Argument gilt für beliebige Oberfläche.



$\hat{n}$: Normaleneinheitsvektor senkrecht zur Tangentialebene,
 da : Flächenelement.

Betrachte Produkt aus Normalkomponente von $\vec{E}$ und Flächenelement:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{r^2} \underbrace{\cos(\theta) da}_{r^2 d\Omega}.$$

$d\Omega$: Raumwinkelement zu da an der Position der Ladung

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n} da = q d\Omega.$$

Integriere Normalkomponente von $\vec{E}$ über die gesamte Oberfläche. $\Rightarrow$

- Gauß'sches Gesetz für eine einzelne Punktladung:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \begin{cases} 4\pi q & \text{für } q \text{ innerhalb } S, \\ 0 & \text{für } q \text{ außerhalb } S. \end{cases}$$

- Mehrere Punktladungen:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi \sum_i q_i.$$

Summe läuft nur über Ladungen innerhalb der Oberfläche.

- Kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$:

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi \int_V \rho d^3x = 4\pi Q_V.} \quad (5.12)$$

V : Von S eingeschlossenes Volumen;

Q_V : Ladung in V .

- Voraussetzungen:

1. Coulomb-Kraft $\sim 1/r^2$,
2. Zentralkraft,
3. Superpositionsprinzip.

- Einfache Anwendung:

Für eine Punktladung im Koordinatenursprung oder eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\hat{e}_r,} \quad \hat{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|},$$

da man das KS beliebig drehen kann.

Sei S Kugeloberfläche mit Radius r , $\hat{n} = \hat{e}_r$, $da = r^2 d\Omega$.

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da &= \int E(r) \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_1 r^2 d\Omega = 4\pi r^2 E(r) \\ &= 4\pi \int_V \rho d^3x = 4\pi Q(r), \\ \Rightarrow \quad &\boxed{E(r) = \frac{Q(r)}{r^2}},\end{aligned}$$

wobei $Q(r)$ die in der Kugel mit Radius r enthaltene Gesamtladung ist.

5.2.4 Differenzielle Form

Gauß'scher Satz (Divergenztheorem)

$\vec{A}$ stetig differenzierbar, $S = \partial V$ geschlossene Fläche, $\hat{n}$ nach außen gerichteter Flächennormaleneinheitsvektor (kurz äußere Normale von S):

$$\boxed{\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x.} \quad (5.13)$$

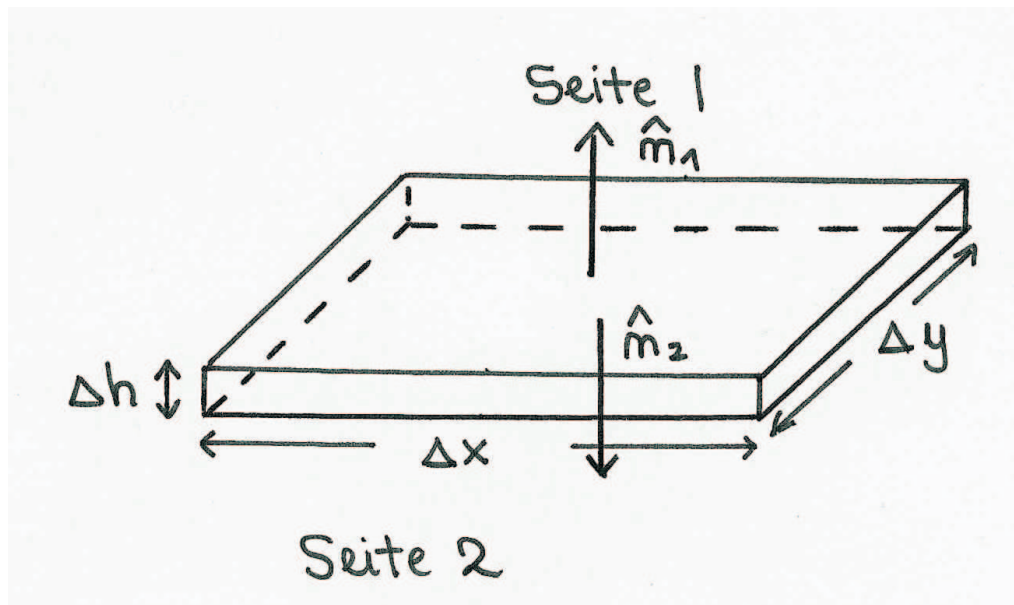
Sei V beliebiges Volumen.

$$\begin{aligned}4\pi \int_V \rho d^3x &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x. \\ \Leftrightarrow \quad &\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi\rho) d^3x = 0. \\ \Leftrightarrow \quad &\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.} \quad (5.14)\end{aligned}$$

Differenzielle Form des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik.

5.2.5 Stetigkeit an Grenzflächen

Aufgabe: Bestimmung des elektrischen Feldes verursacht durch eine vorgegebene Oberflächenladungsverteilung σ .



$\hat{n}$: Normalenvektor von Seite 1 nach Seite 2.

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d^3x &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, da \\
 &\stackrel{*}{=} (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2) \Delta x \Delta y \\
 &= (-\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \hat{n} \, \Delta x \Delta y \\
 &= 4\pi \int_V \rho \, d^3x \\
 &= 4\pi \rho \Delta h \Delta x \Delta y.
 \end{aligned}$$

*: Decke und Boden. Seitenflächen vernachlässigt. $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$: Mittelwerte auf Decke und Boden.

Definiere Oberflächenladungsdichte

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho \Delta h = \sigma.$$

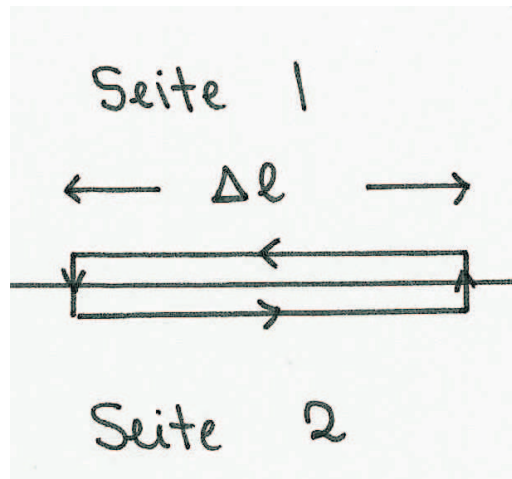
$$\Rightarrow \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma.} \quad (5.15)$$

Die Normalkomponente von $\vec{E}$ ist unstetig und macht einen Sprung um $4\pi\sigma$.

Satz von Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} \, da.$$

Verwende $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.



$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta l E_{2t} + (-\Delta l) E_{1t} = \Delta l (E_{2t} - E_{1t}) \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}.$$

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig.

5.2.6 Skalares Potenzial

Gleichung (5.14) legt $\vec{E}$ noch nicht fest.

Satz: Gegeben seien $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{A}$. Dann ist $\vec{A}$ bis auf $\vec{\nabla} \Lambda$ mit $\vec{\nabla}^2 \Lambda = 0$ festgelegt.

Elektrostatik

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.} \quad (5.16)$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \int d^3x' \rho(\vec{x}') \underbrace{\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{\text{Übung: } -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \\ &= -\vec{\nabla} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}$$

Definition des skalaren, elektrostatischen Potenzials Φ (eindeutig bis auf Konstante):

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi. \quad (5.17)$$

Beachte: Integration über den gesamten Raum (Jackson: „Integration über alle Ladungen im Universum“).

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0.$$

Physikalische Interpretation:

Betrachte die Arbeit, die verrichtet wird, wenn eine Probeladung q im Feld $\vec{E}$ von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$ auf einem Weg $\vec{\alpha}$ bewegt wird. Kraft, die auf q wirkt:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\Phi.$$

$$\begin{aligned} W_{12} &\stackrel{*}{=} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_C \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{s} = q \int_a^b \vec{\nabla}\Phi(\vec{\alpha}(t)) \cdot \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} dt \\ &= q \int_a^b \frac{d\Phi(\vec{\alpha}(t))}{dt} dt = q[\Phi(\vec{\alpha}(b)) - \Phi(\vec{\alpha}(a))] \\ &= q[\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1)]. \end{aligned}$$

*: Negatives Vorzeichen, da Arbeit an der Ladung gegen die Wirkung des Feldes verrichtet wird.

Interpretation: $q\Phi$ ist potenzielle Energie der Probeladung im elektrostatischen Feld.

Da $\vec{E}$ ein Gradientenfeld ist, ist das Integral wegunabhängig und somit

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

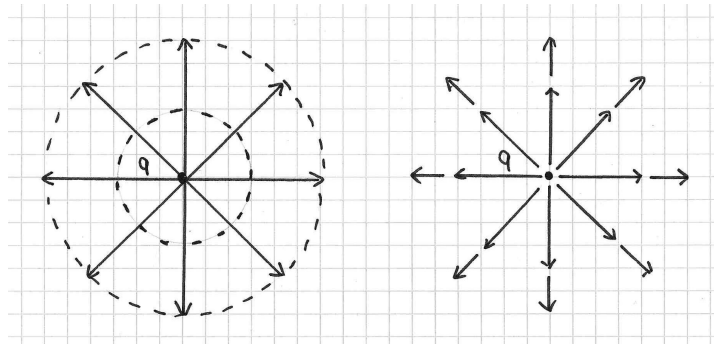
Unter einer Äquipotenzialfläche versteht man die Menge aller Punkte $\vec{x}$ mit $\Phi(\vec{x}) = \text{konst.}$ Wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ ist $\vec{E} \parallel$ Flächen-normale.

Visualisierung

1. Pfeile: Zeichne an ausgewählten Punkten Pfeile in Richtung des elektrischen Feldes an diesem Punkt, Pfeillänge $\sim |\vec{E}|$.
2. Zeichne Schar von Linien. Das Feld ist tangential zu Linien, Betrag wird durch Liniendichte wiedergegeben.

3. Elektrische Feldlinien beginnen in positiven Ladungen (oder im Unendlichen) und enden in negativen Ladungen (oder im Unendlichen).

4. Beispiel



5.2.7 Poisson- und Laplace-Gleichung

Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\text{Gau\ss'sches Gesetz} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi.$$

Einsetzen in Gau\ss'sches Gesetz $\Rightarrow$ **Poisson-Gleichung**

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\Phi = \Delta\Phi = -4\pi\rho} \quad (5.18)$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

In Raumgebieten ohne Ladungsdichte gilt die **Laplace-Gleichung**

$$\boxed{\Delta\Phi = 0.} \quad (5.19)$$

Lösung für Poisson-Gl. aus Gl. (5.17) lautet

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Als Vorbereitung benötigen wir

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{x}). \quad (5.20)$$

Begründung:

- $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{r} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \quad [\text{Zur Erinnerung: } \vec{\nabla} f(r) = f'(r) \hat{e}_r] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right) = - \left(-\frac{3}{r^4} \underbrace{\hat{e}_r \cdot \vec{x}}_r + \frac{1}{r^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{x}}_3 \right) = 0.\end{aligned}$$

- $r = 0$: Betrachte Volumenintegral über Kugel V ,

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{r} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right).$$

Wende Gauß'schen Satz an

$$= - \oint_F \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \underbrace{\hat{n} da}_{\hat{e}_r r^2 d\Omega} = -4\pi \quad (\text{unabhängig vom Kugelradius}).$$

Betrachte Grenzwert $V \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Delta \frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right) = -4\pi \delta(\vec{x}).$$

Verallgemeinert

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}').} \quad (5.21)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Delta \Phi(\vec{x}) &= \Delta \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \int d^3x' \rho(\vec{x}') [-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')] = -4\pi \rho(\vec{x}).\end{aligned}$$

5.2.8 Green'sche Sätze

Bisher: Potenzial für Ladungsverteilung in einem unendlichen Volumen.

Gesucht: Beschreibung für endliches Volumen mit oder ohne Ladungen, wobei Randbedingungen für die begrenzenden Oberflächen vorgegeben seien.

Ausgangspunkt: Gauß'scher Satz für stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{A}$,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da. \quad (5.22)$$

Sei $\vec{A} = \phi \vec{\nabla} \psi$ mit stetig differenzierbaren skalaren Feldern ϕ und ψ . Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi, \quad (5.23)$$

$$\phi \vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}}. \quad (5.24)$$

Richtungsableitung von ψ im Punkt $\vec{x}$ in Richtung $\hat{n}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\vec{x} + t\hat{n}) - \psi(\vec{x})}{t}.$$

Setze Gl. (5.23) in linke Seite von Gl. (5.22) und Gl. (5.24) in rechte Seite von Gl. (5.22) ein.

$\Rightarrow$ **Erster Green'scher Satz**

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi) d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} da.} \quad (5.25)$$

Vertausche ϕ und ψ und subtrahiere das Resultat.

$\Rightarrow$ **Zweiter Green'scher Satz** oder **Green'sches Theorem**

$$\boxed{\int_V (\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi) d^3x = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) da.} \quad (5.26)$$

Umwandlung der Poisson-Gleichung für Φ in eine Integralgleichung mit Hilfe des Green'schen Theorems:

- $\vec{x}$ ist Beobachtungspunkt, $\vec{y}$ ist Integrationsvariable.
- Setze

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \\ \phi &= \Phi. \end{aligned}$$

- Verwende

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi\rho$$

und (Teil 2, Übung 3, Aufgabe 1)

$$\vec{\nabla}_y^2 \frac{1}{R} = (-\vec{\nabla}_x) \cdot (-\vec{\nabla}_x) \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

$\Rightarrow$ Für $\vec{x}$ in V gilt

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \Phi(\vec{y})[-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y})] - \frac{1}{R}[-4\pi\rho(\vec{y})] \right\} d^3y \\ &= -4\pi\Phi(\vec{x}) + 4\pi \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{R} d^3y = \oint_S \left(\Phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right) da. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{R} d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \frac{1}{R} \right) da, \quad \vec{x} \in V.} \quad (5.27)$$

Vergleich mit Gl. (5.17) für den gesamten Raum:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Betrachte $S \rightarrow \infty$ in Gl. (5.27) unter der Annahme, dass $\vec{E}$ auf S stärker als $1/R$ abfällt. $\Rightarrow$ Gl. (5.27) $\rightarrow$ Gl. (5.17).

5.2.9 Randwertprobleme und Eindeutigkeit

1. Dirichlet-Randbedingung (D): Angabe des Potentials auf geschlossenem S (z. B. Leiteroberflächen, die auf gegebenem Potential gehalten werden; Leiter: Ladungsträger frei beweglich).
2. Neumann-Randbedingung (N): Angabe der Normalenableitung auf S .

Gesucht: Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

innerhalb einer Oberfläche S mit (D) oder (N).

Behauptung:

- (D) hat eindeutige Lösung.
- (N) hat bis auf irrelevante Konstante eindeutige Lösung.

Annahme: Φ_1 und Φ_2 Lösungen, die dieselben Randbedingungen erfüllen.

$$U := \Phi_2 - \Phi_1$$

mit

1. $\Delta U = 0$ in V
2. $U = 0$ auf S (D) oder $\partial U / \partial \hat{n} = 0$ auf S (N).

Wende 1. Green'schen Satz mit $\phi = \psi = U$ an:

$$\begin{aligned} & \int_V (\vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U + U \underbrace{\Delta U}_0) d^3x \\ &= \int_V \underbrace{|\vec{\nabla} U|^2}_{\geq 0} d^3x \\ &= \oint_S \underbrace{U}_0 \text{ für (D)} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \hat{n}}}_0 \text{ für (N)} da \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} U = 0$ in $V \Rightarrow U$ ist konstant.

1. (D): $U = 0$ auf S . Stetigkeit von $\Phi_i \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow$ eindeutig.
2. (N): $\Phi_2 = \Phi_1 + \text{konst.}$
3. Eindeutigkeit auch für gemischte Randbedingungen, d. h. (D) auf einem Teil von S und (N) auf dem restlichen Teil von S .
4. Beides gleichzeitig, d. h. Φ und $\partial \Phi / \partial \hat{n}$ lassen sich nicht beliebig vorgeben, da jedes Problem einzeln schon eine eindeutige Lösung besitzt. $\Rightarrow$ Vorsicht mit Gl. (5.27).

5.2.10 Beispiele

Leiter: In einem Leiter (Metall) können sich die Ladungsträger näherungsweise frei bewegen. $\Rightarrow$ Im statischen Gleichgewicht gilt in einem Leiter

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\vec{x}) = \text{konst.}$$

Grenzfläche Leiter-Vakuum

Gebiet 1: Metall, $\vec{E}_1 = 0$.

Gebiet 2: Vakuum.

Stetigkeitsbedingungen $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t} &\Rightarrow E_{2t}(\vec{x})|_S = 0, \\ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma &\Rightarrow E_{2n}(\vec{x})|_S = 4\pi\sigma(\vec{x}). \end{aligned}$$

Faraday'scher Käfig

= beliebig geformte, geschlossene Metallfläche.

In V keine Ladungen:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \text{ in } V, \\ \Phi|_S &= \Phi_0 = \text{konst.} \end{aligned}$$

(D): $\Phi = \Phi_0$ ist eindeutige Lösung $\Rightarrow \vec{E} = 0$ im Faraday'schen Käfig.

5.2.11 Formale Lösung mit Green'scher Funktion

Ziel: Lösung der Poisson- oder Laplace-Gleichung in einem endlichen Volumen mit (D) oder (N) auf S .

Hilfsmittel: **Green'sche Funktion** $G(\vec{x}, \vec{y})$ mit

$$\Delta_y G(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.28)$$

Es gilt

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} + F(\vec{x}, \vec{y}), \quad (5.29)$$

wobei

$$\Delta_y F(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ für } \vec{y} \in V. \quad (5.30)$$

Strategie: Verwende Green'sches Theorem, Gl. (5.26), mit $\phi = \Phi$ und $\psi = G$ und wähle F so, dass das Resultat für eine gegebene Teilfläche nur noch entweder (D) oder (N) enthält.

Rechenschritte wie in Abschnitt 5.2.8 mit $1/R \rightarrow G$: $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \int_V \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) d^3y \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{y})}{\partial \hat{n}} - \Phi(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} \right) da, \quad \vec{x} \in V.\end{aligned}\quad (5.31)$$

1. (D): $\partial \Phi / \partial \hat{n}$ soll nicht auftreten. $\Rightarrow$

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ für } \vec{y} \in S,$$

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \int_V \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3y \\ &- \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{y}) \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} da, \quad \vec{x} \in V.\end{aligned}\quad (5.32)$$

2. (N): **Vorsicht!**

Der naive Ansatz

$$\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ für } \vec{y} \in S$$

steht im Widerspruch zu Gl. (5.28), denn

$$\begin{aligned}\oint_S \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} da &= \oint_S \vec{\nabla}_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \hat{n} da \\ &= \int_V \Delta_y G(\vec{x}, \vec{y}) d^3y \\ &= -4\pi \int_V \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3y \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Einfachste zulässige Randbedingung für G_N :

$$\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} = -\frac{4\pi}{S} \text{ für } \vec{y} \in S,$$

wobei S der Flächeninhalt der Oberfläche ist. Mit

$$\langle \Phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_S \Phi \, da = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{y}) \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \hat{n}} \, da$$

gilt

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V \rho(\vec{y}) G_N(\vec{x}, \vec{y}) \, d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{y})}{\partial \hat{n}} \, da \quad (5.33)$$

für $\vec{x} \in V$.

3. Bemerkungen

- (a) Die Green'sche Funktion ist unabhängig von den expliziten Dirichlet- bzw. Neumann-Randwerten.
- (b) Die Bestimmung ist häufig sehr kompliziert, da abhängig von der Oberflächenform.
- (c) Interpretation von $F(\vec{x}, \vec{y})$: Lösung der Laplace-Gleichung in V . Stellt das Potenzial eines Systems von Ladungen außerhalb V dar.

5.2.12 Elektrostatische, potenzielle Energie und Energiedichte

Betrachte skalares Potenzial Φ mit $\Phi(\vec{x}) \rightarrow 0$ für $r = |\vec{x}| \rightarrow \infty$:

$$W_i = q_i \Phi(\vec{x}_i)$$

= potenzielle Energie einer Punktladung q_i in $\vec{x}_i$

= verrichtete Arbeit, um q_i aus ∞ nach $\vec{x}_i$ zu bringen.

$\Phi(\vec{x})$ werde durch $n - 1$ Ladungen q_j in $\vec{x}_j$ erzeugt:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}.$$

Potenzielle Energie der Ladung q_i in $\vec{x}_i$:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}.$$

Gesamte potenzielle Energie aller Ladungen aufgrund der elektrostatischen Kräfte:

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \quad (5.34)$$

Anschaulich: Bringe eine Ladung nach der anderen aus dem Unendlichen in ihre Position, dabei wirke jeweils das Potenzial derjenigen Ladungen, die schon bewegt wurden.

$n = 2$:

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{q_2 q_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}.$$

$n - 1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned} W(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n) &= W(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) + q_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_n - \vec{x}_j|} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + q_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_n - \vec{x}_j|} \\ &= \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \end{aligned}$$

Symmetrische Form:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}}. \quad (5.35)$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}}. \quad (5.36)$$

Verwende

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

⇒ Äquivalenter Ausdruck:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}).} \quad (5.37)$$

Gesucht: Ausdruck mittels elektrischen Feldes. Interpretation: Die Energie ist im elektrischen Feld gespeichert, das die Ladungen umgibt.

Verwende Poisson-Gleichung $\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi\rho$:

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) \Phi(\vec{x}).$$

Standardargument: „Partielle Integration liefert ...“.

Damit ist Folgendes gemeint:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi \Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi \Phi) - \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi.$$

Verwende für das erste Integral den Gauß'schen Satz mit Kugel, deren Radius gegen ∞ geht. Für eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung geht Φ mindestens wie $1/r$ gegen null, $\vec{\nabla} \Phi$ mindestens wie $1/r^2$. ⇒

$$\begin{aligned} \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi \Phi) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \underbrace{\Phi}_{\sim \frac{1}{r}} \underbrace{\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{e}_r}_{\sim \frac{1}{r^2}} r^2 d\Omega \\ &\sim \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0. \end{aligned}$$

⇒

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2.} \quad (5.38)$$

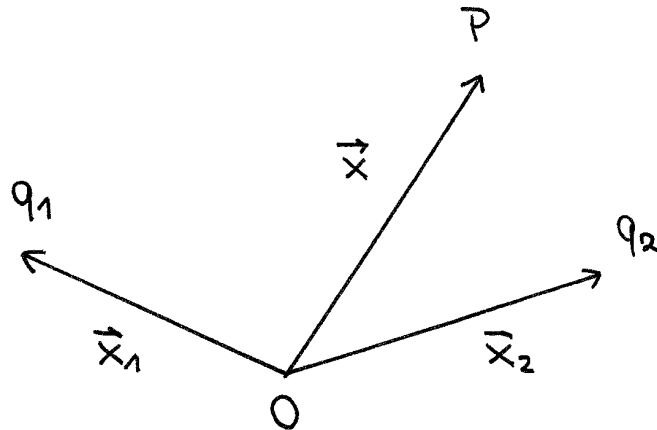
Man spricht auch von der Feldenergie, da Bezug zu Ladungen verschwunden ist.

Energiedichte:

$$\boxed{w(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{x}).} \quad (5.39)$$

- Potenzielle Energie zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen ist negativ, W aus Gl. (5.38) ≥ 0 .
- Widerspruch? Nein: Gl. (5.38) enthält Selbstenergiebeiträge zur Energiedichte w .

Illustration



$$\vec{E}(\vec{x}) = q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3}.$$

$$w(\vec{x}) = \underbrace{\frac{q_1^2}{8\pi|\vec{x} - \vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{8\pi|\vec{x} - \vec{x}_2|^4}}_{\text{Selbstenergiebeiträge}} + \frac{q_1 q_2 (\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_1|^3 |\vec{x} - \vec{x}_2|^3}.$$

(Potenzielle) Wechselwirkungsenergie (int für interaction)

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \int d^3x \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3 |\vec{x} - \vec{x}_2|^3}.$$

Teil 2, Übung 3, Aufgabe 3: Substitution, $\dots$, $\Rightarrow$

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}.$$

5.2.13 Separation der Variablen für Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

Laplace-Gleichung:

$$\Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0. \quad (5.40)$$

Ziel: Bestimmung des Potentials für ein ladungsfreies Volumen V mit (D).

Lösungsmethode: Produktansatz $\rightarrow$ Separation der Variablen
 $\rightarrow$ gewöhnliche DGLen $\rightarrow$ Superposition unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

Separations- oder Produktansatz:

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (5.41)$$

$\partial^2/\partial x^2$ wirkt nur auf X usw. $\Rightarrow$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y Z + X \frac{d^2 Y}{dy^2} Z + X Y \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Dividiere durch $XYZ \neq 0$ (Trennung der Variablen)

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{h(z)} = 0 \quad \forall \quad (x, y, z) \in V.$$

Nur möglich, wenn f , g und h allesamt Konstanten sind.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\alpha^2, & (\text{Separationskonstante oder -parameter}) \\ g(y) &= -\beta^2, \\ h(z) &= -\gamma^2 \end{aligned}$$

mit $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, d. h. mindestens eines der Quadrate ist negativ, d. h. eines der α, β, γ ist rein imaginär.

Ergebnis des Separationsansatzes:

Partielle DGL in 3 Koordinaten $\rightarrow$ 3 gewöhnliche DGLen.

$$\boxed{\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad \text{und zyklisch für } Y(y), Z(z).} \quad (5.42)$$

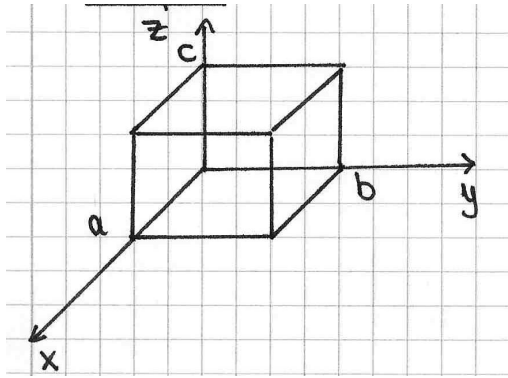
Lösung mittels Euler-Ansatz:

$$X(x) \sim e^{\pm i\alpha x}.$$

α reell: Kreisfunktionen.

α imaginär: Hyperbelfunktionen.

Beispiel:



Keine Ladungen im Inneren: $\Delta\Phi = 0$.

Randwertaufgabe:

$$\Phi(x, y, c) = \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{Oberseite}),$$

alle anderen Seitenflächen geerdet, d. h.

$$\Phi(a, y, z) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c, \quad \text{usw.}$$

Allgemeine Lösung

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad \alpha^2 \neq 0. \quad (5.43)$$

$$\alpha^2 > 0: \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha^2 < 0: \alpha = i\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 = A + B \Rightarrow B = -A, \\ X(a) &= 0 = A \underbrace{(e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a})}_{0 \Rightarrow e^{2i\alpha a} = 1}, \\ \Rightarrow \quad \alpha a &= n\pi, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\boxed{X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}} \quad (5.44)$$

ist Lösung der DLG für $\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$.

Beachte: Die Randbedingungen haben die möglichen Werte von α eingeschränkt.

Analog

$$\boxed{Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad m \in \mathbb{N}.} \quad (5.45)$$

Lösungen in z :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{nm}^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 < 0.$$

Setze

$$\gamma_{nm} = i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} = i\bar{\gamma}_{nm}.$$

$$Z(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} = Ae^{-\bar{\gamma}z} + Be^{\bar{\gamma}z}.$$

Randbedingung für $z = 0$:

$$0 = Z(0) = A + B \quad \Rightarrow \quad A = -B \quad \Rightarrow \quad \text{Sinus hyperbolicus.}$$

$$\boxed{Z_{nm} = \sinh(\bar{\gamma}_{nm}z) \quad \text{mit} \quad \bar{\gamma}_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} \quad (5.46)$$

Superpositionsansatz für Gesamtlösung:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \frac{\underbrace{\Phi_{nm}(x, y, z)}}{\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\bar{\gamma}_{nm} z)}.$$

Bestimmung der Koeffizienten a_{nm} durch Anpassung an die Randbedingungen an der Oberseite:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, c) &= \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ &= \sum_{n,m=1} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\bar{\gamma}_{nm}c) \end{aligned}$$

$$\forall 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b. \Rightarrow n = m = 1,$$

$$a_{11} = \frac{\Phi_0}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}} c\right)}.$$

Endergebnis:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \pi z\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \pi c\right)}.$$

5.2.14 Orthogonale Funktionen und Entwicklungen

Motivation: Darstellungen von Lösungen von Potenzialproblemen mittels Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen.

F: Welcher Satz von Funktionen ist der geeignete?

A: Abhängig von der Symmetrie des Problems.

Allgemeine Eigenschaften orthogonaler Funktionen

Sei $I = [a, b]$ Intervall und V die Menge aller auf I quadratintegrierbarer, reeller oder komplexer Funktionen.

Definiere Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx f^*(x)g(x). \quad (5.47)$$

Gegeben sei eine Menge $S = \{u_i; i \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_a^b dx u_i^*(x)u_j(x) = \delta_{ij}. \quad (\text{orthonormiert}) \quad (5.48)$$

S heißt Orthonormalbasis (ONB) von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (Skalarprodukt-raum, Prä-Hilbert-Raum), wenn für jedes $f \in V$ gilt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x) \quad (5.49)$$

mit

$$a_i = \int_a^b dx u_i^*(x)f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \underbrace{\int_a^b dx u_i^*(x)u_j(x)}_{\delta_{ij}}. \quad (5.50)$$

Fourier-Reihe von f bezüglich S .

Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x')u_i(x) = \delta(x' - x). \quad (5.51)$$

Analogie

$\mathbb{R}^3$	V
$\{\hat{e}_i\}$	$\{u_i\}$
$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$	$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$
$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i$	$f = \sum_i a_i u_i$
$a_i = \hat{e}_i \cdot \vec{x}$	$a_i = \langle u_i, f \rangle$
$\sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \hat{e}_i^T = \mathbb{1}$	$\sum_i u_i^*(x') u_i(x) = \delta(x' - x)$

Beispiel: $I = [-a/2, a/2]$.

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right), \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right); n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (5.52)$$

Häufig geschrieben als

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) \right]. \quad (5.53)$$

Grenzfall $a \rightarrow \infty$: Aus abzählbar unendlicher Menge wird eine überabzählbar unendliche Menge.

Startpunkt: Betrachte

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\frac{2\pi n}{a}x}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.54)$$

auf $I = [-a/2, a/2]$ mit Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi n}{a}x},$$

$$\mathbb{C} \ni a_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{-i\frac{2\pi n}{a}x} f(x).$$

Heuristisch: $a \rightarrow \infty$ impliziert

$$\begin{aligned} \text{diskretes } k_n &:= \frac{2\pi}{a}n \rightarrow \text{kontinuierliches } k, \\ \sum_n &\rightarrow \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, \\ a_n &\rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}} a(k). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fourier-Integral

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{ikx}, \\ a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Orthogonalität

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} = \delta(k' - k).} \quad (5.56)$$

Vollständigkeit

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x' - x).} \quad (5.57)$$

5.2.15 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Legendre-Polynome

Anwendung: Randbedingungen mit sphärischer Geometrie. Z. B. Potenzial auf einer Kugeloberfläche vorgegeben.

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(r, \theta, \phi) &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Phi(r, \theta, \phi) = 0. \end{aligned}$$

1. $[\dots]$ ist Laplace-Operator in Kugelkoordinaten.
2. Keine gemischten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ usw.

3. Teil 2, Übung 2, Aufgabe 3:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}.$$

Produktansatz:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \underbrace{\frac{R(r)}{r} P(\theta)}_{f(r, \theta)} Q(\phi). \quad (5.58)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 R}{dr^2} P Q + \frac{R}{r^3} Q \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] + \frac{R}{r^3} \frac{P}{\sin^2(\theta)} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0. \quad (5.59)$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\text{Gl. (5.59)} \times \frac{r^3 \sin^2(\theta)}{P Q R}.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -\alpha^2 = -\frac{r^2 \sin^2(\theta)}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{\sin(\theta)}{P} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right]. \quad (5.60)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \alpha^2 Q = 0, \quad \alpha^2 \in \mathbb{R}.} \quad (5.61)$$

Lösungsansatz ($\alpha^2 \neq 0$):

$$Q = A e^{i\alpha\phi} + B e^{-i\alpha\phi}.$$

Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} \alpha^2 < 0 : \quad & \alpha = i\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} > 0, \quad Q = A e^{-\bar{\alpha}\phi} + B e^{\bar{\alpha}\phi}, \\ \alpha^2 > 0 : \quad & \alpha > 0, \quad Q = A e^{i\alpha\phi} + B e^{-i\alpha\phi}, \\ \alpha^2 = 0 : \quad & Q = A + B\phi. \end{aligned}$$

Die physikalisch relevanten Lösungen ergeben sich aus 2π -Periodizität:

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q(2\pi), \\ Q'(0) &= Q'(2\pi). \end{aligned}$$

⇒ Teil 2, Übung 4, Aufgabe 5:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &< 0 && \text{ausgeschlossen,} \\ \alpha &= m \in \mathbb{N}_0, \\ \text{Lösungen} &\sim e^{\pm im\phi}, \quad m \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\text{Gl. (5.59)} \times \frac{r^3}{PQR}.$$

⇒

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} &= \beta \quad (\text{Separationskonstante}) \\ &= -\frac{1}{P \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] \underbrace{-\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\phi^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)}}_{m^2}\end{aligned}$$

⇒

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] + \left[\beta - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] P = 0. \quad (5.62)$$

S. u.: $\beta = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}_0$.

⇒ Radial-Gleichung:

$$\boxed{\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0.} \quad (5.63)$$

Lösung (Teil 2, Übung 4, Aufgabe 4):

$$R_l(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}. \quad (5.64)$$

Bemerkung: Partielle DGL in 3 Koordinaten → 3 gewöhnliche DGLen.

Gl. (5.62) ⇒

$$P'' + \cot(\theta) P' + \left[\beta - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] P = 0.$$

Substituiere $x = \cos(\theta)$, $0 < \theta < \pi \Leftrightarrow \theta = \arccos(x)$, $-1 < x < 1$:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= P(\arccos(x)) =: y(x), \\ y'(x) &= P'(\theta) \arccos'(x) = -P'(\theta) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow P'(\theta) &= -\sqrt{1-x^2} y'(x), \\ y''(x) &= \dots, \\ \Rightarrow P''(\theta) &= \dots, \end{aligned}$$

(Teil 2, Übung 4, Aufgabe 6): Einsetzen liefert die **allgemeine Legendre-DGL**:

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\beta - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0.} \quad (5.65)$$

Führt auf assoziierte Legendre-Funktionen $P_l^m(x)$, $\beta = l(l+1)$, $l, m \in \mathbb{N}_0$.

Spezialfall $m = 0$ (keine ϕ -Abhängigkeit) zur Illustration der allgemeinen Methode:

Legendre-DGL $\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta y = 0.} \quad (5.66)$

Potenzreihenansatz: y soll in $[-1, 1]$ endlich sein, deshalb keine negativen Potenzen von x .

$$\begin{aligned}
 y &= y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \\
 \Rightarrow y' &= \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}, \\
 \Rightarrow y'' &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}, \\
 2xy' &= \sum_{j=1}^{\infty} 2j a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} 2j a_j x^j, \\
 (1-x^2)y'' &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} [(j+2)(j+1) a_{j+2} - j(j-1) a_j] x^j.
 \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL liefert

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+2)(j+1) a_{j+2} - j(j-1) a_j - 2j a_j + \beta a_j] x^j = 0.$$

Koeffizientenvergleich:

$$(j+2)(j+1) a_{j+2} - j(j-1) a_j - 2j a_j + \beta a_j = 0 \quad \forall \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

$\Rightarrow$ Rekursionsformel:

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \beta}{(j+1)(j+2)} a_j \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

Aus $\begin{cases} a_0 \text{ berechnet sich } a_2, a_4, \dots \text{ (gerade Funktionen),} \\ a_1 \text{ berechnet sich } a_3, a_5, \dots \text{ (ungerade Funktionen).} \end{cases}$

Betrachte Verhalten für $j \rightarrow \infty$. Es sei N so groß, dass $a_{j+2} \approx$

a_j für $j > N$. $\Rightarrow$ Die Reihe verhält sich wie

$$\cdots + a_N x^N \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \cdots)}_{\frac{1}{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{1-x^2} \quad \text{divergiert für } x \rightarrow \pm 1.$$

Forderung nach $y \in C^2[-1, +1] \Rightarrow$ Abbruch der Potenzreihe für $\beta = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}_0$:

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)} a_j = -\frac{(l-j)(l+j+1)}{(j+1)(j+2)} a_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{l(l+1)}{1 \cdot 2} a_0, \\ a_4 &= -\frac{(l-2)(l+3)}{3 \cdot 4} a_2 = (-)^2 \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a_0. \end{aligned}$$

Per Induktion:

$$a_{2j} = (-)^j \frac{l(l-2) \cdots (l-2j+2)(l+1)(l+3) \cdots (l+2j-1)}{(2j)!} a_0.$$

Analog:

$$a_{2j+1} = (-)^j \frac{(l-1)(l-3) \cdots (l-2j+1)(l+2)(l+4) \cdots (l+2j)}{(2j+1)!} a_1.$$

1. Fall: $l = 2n$, $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ nur gerade Potenzen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{j=1}^n (-)^j \frac{(2n+2j)!}{(n-j)!(n+j)!(2j)!} x^{2j}, \\ y_1(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Fall: $l = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ nur ungerade Potenzen

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x + \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{j=1}^n (-)^j \frac{(2n+2j+1)!}{(n-j)!(n+j)!(2j+1)!} x^{2j+1}, \\ y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Legendre-Polynome P_l

$$P_l(x) := \frac{(-1)^{\frac{l}{2}} l!}{\left[\left(\frac{l}{2}\right)!\right]^2 2^l} y_1(x) \quad \text{für gerades } l,$$

$$P_l(x) := \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} l!}{\left[\left(\frac{l-1}{2}\right)!\right]^2 2^{l-1}} y_2(x) \quad \text{für ungerades } l.$$

Eigenschaften

1. Polynom vom Grad l , $l \in \mathbb{N}_0$.

2. $P_l(1) = 1$.

3. $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

4. Formel von Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (5.67)$$

5. $\{P_l; l \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Orthogonalbasis von $(C[-1, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$:

$$\langle P_l, P_{l'} \rangle = \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (5.68)$$

Für $f \in C[-1, 1]$ gilt

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x), \quad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x) f(x).$$

6. Mit $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ ($|x| \leq 1$) lassen sich alle Legendre-Polynome aufgrund der Rekursionsformel

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) \quad (l \in \mathbb{N}) \quad (5.69)$$

bestimmen.

7. Beispiele

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

5.2.16 Zylindersymmetrisches Problem

Keine ϕ -Abhängigkeit. Verwende Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(r, \theta) &= 0, \\ \Phi(r, \theta) &= \frac{R(r)}{r} P(\theta).\end{aligned}$$

Führt auf

$$P(\theta) = P_l(\cos(\theta)), \quad R(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l} \quad (l \in \mathbb{N}_0).$$

Superpositionsprinzip $\Rightarrow$ allgemeine, zylindersymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta)). \quad (5.70)$$

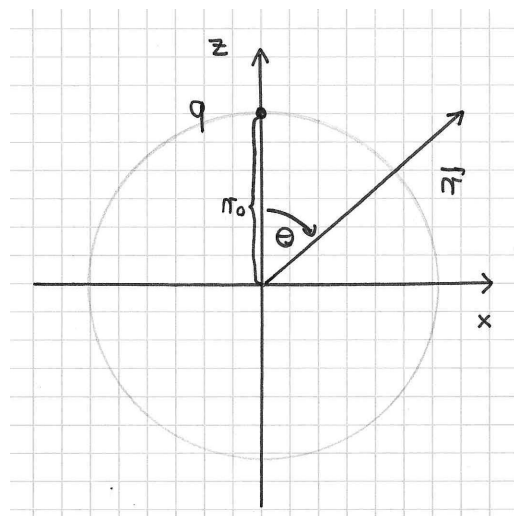
Bemerkungen:

1. Da die $\{P_l(\cos(\theta))\}$ für $0 \leq \theta \leq \pi$ vollständig und orthogonal sind, ist Gl. (5.70) tatsächlich die allgemeine Lösung.
2. Randbedingungen legen die Koeffizienten fest.

Spezialfall $\theta = 0$: $P_l(1) = 1. \Rightarrow$

$$\Phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right). \quad (5.71)$$

Beispiel: Punktladung q bei $\vec{x}_0$. Wähle Koordinatensystem mit $\vec{x}_0 = r_0 \hat{e}_z$.



$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta)}}.$$

Es gilt die Laplace-Gleichung

$$\left. \begin{array}{l} V_1 : r < r_0, \\ V_2 : r > r_0 \end{array} \right\} \Delta \Phi(\vec{x}) = 0.$$

Führe in V_i jeweils eine Entwicklung vom Typ Gl. (5.70) durch.

Betrachte Potenzial auf der z -Achse. Für $\theta = 0$ gilt

$$|\vec{x} - \vec{x}_0| = \begin{cases} r_0 - r & \text{für } \vec{x} \in V_1, \\ r - r_0 & \text{für } \vec{x} \in V_2. \end{cases}$$

$\vec{x} \in V_1$:

$$\Phi(r, 0) = \frac{q}{r_0 - r} = \frac{q}{r_0} \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}} = \frac{q}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{r_0^{l+1}} r^l.$$

$\vec{x} \in V_2$:

$$\Phi(r, 0) = \frac{q}{r - r_0} = \frac{q}{r} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr_0^l}{r^{l+1}}.$$

Vergleich mit Gl. (5.71) liefert

$$\text{in } V_1 : \quad a_l = \frac{q}{r_0^{l+1}}, \quad b_l = 0;$$

$$\text{in } V_2 : \quad a_l = 0, \quad b_l = qr_0^l.$$

$\Rightarrow$

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{r_0^{l+1}} r^l P_l(\cos(\theta)) & \text{in } V_1, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta)) & \text{in } V_2. \end{cases}$$

Definiere

$$r_{>} = \max(r, r_0),$$

$$r_{<} = \min(r, r_0).$$

$\Rightarrow$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos(\theta)).$$

5.2.17 Zugeordnete Legendre-Funktionen und Kugelfunktionen

Jetzt: Azimutale Variationen = ϕ -Abhängigkeit = „ $m \neq 0$ “ [siehe Gl. (5.65)].

Methodik ähnlich wie zuvor: Forderung nach endlichen Lösungen für $-1 \leq x \leq 1$ führt auf

$$l = 0, 1, 2, \dots, \quad \wedge \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l.$$

Lösungen mit dieser Eigenschaft = **Zugeordnete Legendre-Funktionen**:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, l. \quad (5.72)$$

Faktor $(-1)^m$ ist Konventionsfrage.

P_l^{-m} ist proportional zu P_l^m , da allg. Legendre-DGL nur von m^2 abhängt:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (5.73)$$

Kombiniere mit Gl. (5.67) (Formel von Rodrigues):

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \quad (5.74)$$

Orthogonalitätsrelation bei festem m :

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m(x) P_l^m = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l} \quad \text{für } l', l \geq |m|.$$

$$(5.75)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
P_l^0(x) &= P_l(x), \\
P_l^m(x) &= 0 \quad \text{für } m > l, \\
P_0^0(x) &= P_0(x) = 1, \\
P_1^0(x) &= P_1(x) = x = \cos(\theta), \\
P_1^1(x) &= \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)}_2 = -\sqrt{1 - x^2} = -\sin(\theta), \\
P_1^{-1}(x) &= -\frac{1}{2} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} P_1^1(x).
\end{aligned}$$

Alternativ mit Hilfe von Gl. (5.73):

$$P_1^{-1} = (-1)^1 \frac{0!}{2!} P_1^1 = -\frac{1}{2} P_1^1.$$

Beachte: $0! := 1$.

Kombiniere Winkelfunktionen und konstruiere ONB (B für Basis) für die Einheitskugel $\Rightarrow$ **Kugelfunktionen** Y_{lm} :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}. \quad (5.76)$$

Wegen Gl. (5.73) gilt

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi). \quad (5.77)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi}, \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta), \\
Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2(\theta) e^{2i\phi}, \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\phi}, \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen rY_{1m} und x, y, z : Siehe **Teil 2, Übung 5, Aufgabe 4**:

$$\begin{aligned}
rY_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z, \\
rY_{11}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (x + iy), \\
rY_{1,-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy), \\
z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} rY_{10}(\theta, \phi), \\
x &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} r [Y_{1,-1}(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)], \\
y &= i\sqrt{\frac{2\pi}{3}} r [Y_{1,-1}(\theta, \phi) + Y_{11}(\theta, \phi)].
\end{aligned}$$

Orthonormiert:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (5.78)$$

Vollständig:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi' - \phi) \delta(\cos(\theta') - \cos(\theta)). \quad (5.79)$$

Jede stetige Funktion auf der Einheitskugel (auch 2-Sphäre S^2 genannt) lässt sich eindeutig nach den Y_{lm} entwickeln:

$$g(\theta, \phi) = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)}_{\text{Physik: } \sum_{l,m}} \quad (5.80)$$

mit

$$A_{lm} = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta)}_{\int d\Omega} Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi). \quad (5.81)$$

Zurück zum Ausgangspunkt:

$$\Delta \Phi(r, \theta, \phi) = 0, \quad \Phi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \phi).$$

Allgemeine Lösung für ein Randwertproblem in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (5.82)$$

5.2.18 Multipolentwicklung

Gegeben: Räumlich lokalisierte Ladungsverteilung mit

$$\rho(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \text{„beliebig“} & \text{für } r \leq R, \\ 0 & \text{für } r > R. \end{cases}$$

Fragestellung: Wie sieht das Potenzial weit entfernt aus?

Verwende

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.83)$$

Verallgemeinerung von

$$\vec{x}' = (0, 0, r') \rightarrow (r' \sin(\theta') \cos(\phi'), r' \sin(\theta') \sin(\phi'), r' \cos(\theta'))$$

lautet für

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (5.84)$$

Einsetzen in Gl. (5.83) mit $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$r > R.$

Definiere **Multipolmoment**

$$q_{lm} = \int d^3x' Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}'). \quad (5.85)$$

$\Rightarrow$ Multipolentwicklung des Potentials für $r > R$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}. \quad (5.86)$$

- Weit entfernt sind die Details der Ladungsverteilung nicht mehr wichtig: eine Approximation mittels der führenden Ordnungen ist oft ausreichend.
- q_{lm} charakterisieren Ladungsverteilung.
- Systematische Verbesserung möglich.

Kartesische Darstellung

Betrachte Taylor-Reihenentwicklung in mehreren Veränderlichen

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\vec{h} \cdot \vec{\nabla})^n}{n!} f(\vec{x}_0).$$

Anwendung auf

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

mit $\vec{x}_0 = \vec{x}$ und $-\vec{x}' = \vec{h}$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \frac{1}{r}, \\ \nabla_i f(\vec{x}) &= -\frac{x_i}{r^3}, \\ \nabla_j \nabla_i f(\vec{x}) &= -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5}, \quad \dots, \\ \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{x}' \cdot \vec{x})^2 - \vec{x}'^2 \vec{x}^2}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

Einsetzen in Gl. (5.83) liefert

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (5.87)$$

mit

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3 x' \rho(\vec{x}') \quad (\text{Gesamtladung}), \\ \vec{d} &= \int d^3 x' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \quad (\text{Dipolmoment}), \\ Q_{ij} &= \int d^3 x' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') \quad (\text{Quadrupoltensor}). \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Q , d_i und Q_{ij} sind im Sinne von Kapitel 4 die Komponenten von Tensoren nullter, erster und zweiter Stufe.
- Äquivalenz zwischen $q_{00} \leftrightarrow Q$, $q_{1m} \leftrightarrow d_i$, $q_{2m} \leftrightarrow Q_{ij}$.
Beachte: $Q_{ij} = Q_{ji}$ und $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0$. Deshalb $9 - 3 - 1 = 5$ unabhängige Komponenten.

Multipolentwicklung für die elektrostatische Wechselwirkungsenergie einer lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in einem äußeren Potenzial $\Phi(\vec{x})$:

$$W = \int d^3 x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}).$$

Annahmen:

- ρ ist lokalisiert in Kugel um Ursprung mit Radius R .
- Φ variiert langsam im Gebiet der Ladungsverteilung.
- Die Quellen von Φ liegen außerhalb der Ladungsverteilung.

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \Phi(0) + \dots$$

Beachte:

$$\begin{aligned} E_i(0) &= -\nabla_i \Phi(0), \\ \Delta \Phi(0) &= -\nabla_i E_i(0) = 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \Phi(0) &= \frac{1}{6} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \nabla_i \nabla_j \Phi(0) \\ &= -\frac{1}{6} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \nabla_i E_j(0). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} W &= \int d^3x \rho(\vec{x}) \left[\Phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \Phi(0) + \dots \right] \\ &= Q\Phi(0) - \vec{d} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \nabla_i E_j(0) + \dots \end{aligned} \quad (5.88)$$

Entwicklung zeigt, wie verschiedene Multipole mit einem äußeren Feld wechselwirken: Ladung mit Potenzial, Dipol mit elektrischem Feld, Quadrupol mit dem Feldgradienten, usw.

5.3 Kontinuitätsgleichung

Die elektrische Ladung ist unter allen Wechselwirkungen erhalten. Dies gilt sogar lokal.

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung.

Gegeben:

- Zeitlich abhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$, die ganz im Endlichen liegt;
- Stromdichte $\vec{J}(\vec{x}, t)$, erzeugt durch Bewegungen der in ρ enthaltenen Ladungen.

Bilanzgleichung

Hat $Q(V)$ abgenommen
 zugewonnen, so muss in der Bilanz über die Fläche
mehr Strom aus- als eingetreten
 ein- ausgetreten sein.

$$\int_F \vec{J} \cdot \hat{n} \, da = \int_V d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{J}.$$
$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \dots \rightarrow \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} \dots$$

Da V beliebig, muss der Integrand verschwinden. $\Rightarrow$

Maxwell-Gleichungen implizieren Kontinuitätsgleichung (Teil 2, Übung 1, Aufgabe 2).

Radikaler Unterschied zwischen Elektro- und Magnetostatik:
Es existieren keine isolierten magnetischen Ladungen (Monopole) $\Rightarrow$

Gilt für Statik und Dynamik!

Definition des magnetischen Feldes (magnetische Flussdichte, magnetische Induktion) über Drehmoment $\vec{N}$ auf magnetischen Dipol $\vec{\mu}$:

$$\vec{N}(\vec{x}) = \vec{\mu} \times \vec{B}(\vec{x}). \quad (5.92)$$

Vergleiche mit Gl. (5.9) für elektrisches Feld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}).$$

Statik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}), \quad (5.93)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0. \quad (5.94)$$

5.4.1 Ampere'sches Gesetz

Gegeben sei eine endliche (stückweise) glatte Fläche F mit Randkurve C . Wende Satz von Stokes auf linke Seite von Gl. (5.93) an:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_F \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{n} da \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{J} \cdot \hat{n} da \\ &= \frac{4\pi}{c} I, \end{aligned}$$

wobei I der gesamte, durch die Fläche F tretende elektrische Strom ist.

$$\textbf{Ampere'sches Gesetz} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (5.95)$$

5.4.2 Vektorpotenzial und Poisson-Gleichung

Wegen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

lässt sich schreiben

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}). \quad (5.96)$$

Mit **Teil 2, Übung 1, Aufgabe 1** gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (5.97)$$

Eine so genannte Eichtransformation am Vektorpotenzial

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (5.98)$$

mit zweifach stetig differenzierbarem χ , lässt das physikalische magnetische Feld $\vec{B}$ unverändert, da

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi = 0.$$

Wähle χ so, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\textbf{Coulomb-Eichung}). \quad (5.99)$$

$\Rightarrow$

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Entspricht drei Poisson-Gleichungen. Lösung ohne spezielle Randbedingungen (siehe Abschnitt 5.2.7)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.100)$$

Für das Magnetfeld erhalten wir

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int d^3 x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Verwende Produktregel $\vec{\nabla} \times (C \vec{D}) = \vec{\nabla} C \times \vec{D} + C \vec{\nabla} \times \vec{D}$ und

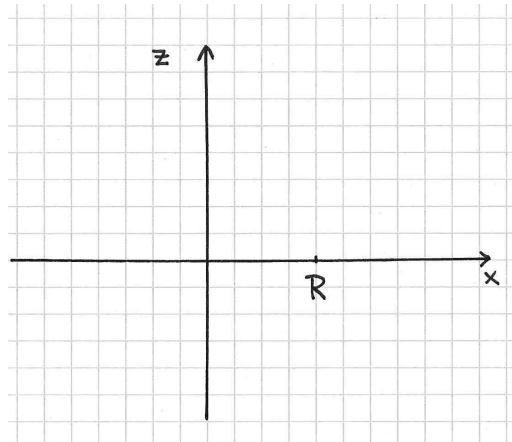
$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

$\Rightarrow$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (5.101)$$

5.4.3 Gesetz von Biot und Savart

Betrachte unendlich langen, sehr dünnen Leiter entlang der z -Achse:



Wähle als Beobachtungspunkt $\vec{x} = (R, 0, 0)$.

Stromdichte:

$$\vec{J}(\vec{x}) = I\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z.$$

Wende Gl. (5.101) an:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{I\delta(x')\delta(y')\hat{e}_z \times (R\hat{e}_x - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\hat{e}_z \times (R\hat{e}_x - z'\hat{e}_z)}{|R\hat{e}_x - z'\hat{e}_z|^3} \\ &= \frac{IR}{c} \hat{e}_y \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(R^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Substitution $t = z'/R$

$$= \frac{I}{cR} \hat{e}_y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{Int}}.$$

Substitution

$$t = \tan(\theta), \quad -\infty < t < \infty \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$dt = d \tan(\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)},$$

$$\text{Int} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\cos^2(\theta) \left(1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta) = 2.$$

$\Rightarrow$

$$\vec{B}(R, 0, 0) = \frac{2I}{cR} \hat{e}_y \sim \frac{1}{R}.$$

Problem axialsymmetrisch. Feldlinien sind geschlossene Kreise um z -Achse. Da Leiter unendlich lang, für beliebiges z gültig.

5.4.4 Magnetische Dipoldichte und magnetisches Moment

Annahme: $\vec{J}(\vec{x})$ in einem Bereich $|\vec{x}| \leq R$ um den Ursprung lokalisiert.

Entwickle inverse Abstandsfunktion für $r = |\vec{x}| > R$,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \dots,$$

und setze in Gl. (5.100) ein:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c r} \int d^3 x' \vec{J}(\vec{x}') + \frac{1}{c r^3} \int d^3 x' \vec{x} \cdot \vec{x}' \vec{J}(\vec{x}') + \dots$$

Hilfsformel: f und g stetig differenzierbare Funktionen, $\vec{v}$ lokalisiertes Vektorfeld mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Dann gilt

$$\int d^3 x (f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f) = 0.$$

Begründung: Partielle Integration im zweiten Term

$$\int d^3 x g \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \int d^3 x \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v} f) - \int d^3 x \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v}) f.$$

Da $\vec{v}$ lokalisiert angenommen wurde, gilt mit dem Satz von Gauß

$$\int d^3 x \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v} f) = \int_F g f \vec{v} \cdot \hat{n} da = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \int d^3x (f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f) \\
&= \int d^3x (f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g - \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v}) f) \\
&= \int d^3x (\underbrace{f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g - \vec{\nabla} g \cdot \vec{v} f}_0 - g \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} f}_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Anwendungen:

1. $f = 1, g = x_i, \vec{v} = \vec{J}. \Rightarrow$

$$0 = \int d^3x \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{\nabla}}_{J_j \nabla_j} x_i = \int d^3x J_j \delta_{ji} = \int d^3x J_i.$$

2. $f = x_i, g = x_j, \vec{v} = \vec{J}. \Rightarrow$

$$0 = \int d^3x (x_i J_j + x_j J_i).$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \int d^3x' \vec{x} \cdot \vec{x}' J_i(\vec{x}') \hat{e}_i \\
&= x_j \int d^3x' x'_j J_i(\vec{x}') \hat{e}_i \\
&\stackrel{2.}{=} \frac{1}{2} x_j \int d^3x' [x'_j J_i(\vec{x}') - x'_i J_j(\vec{x}')] \hat{e}_i \\
&= -\frac{1}{2} x_j \int d^3x' (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x'_l J_m(\vec{x}') \hat{e}_i.
\end{aligned}$$

Verwende $\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$.

$$\begin{aligned}
\cdots &= -\frac{1}{2} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \int d^3x' \epsilon_{klm} x'_l J_m(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{2} \vec{x} \times \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}').
\end{aligned}$$

Mit der statischen Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \int d^3x' \vec{J}(\vec{x}') &= 0, \\ \int d^3x' \vec{x} \cdot \vec{x}' \vec{J}(\vec{x}') &= -\frac{1}{2} \vec{x} \times \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}'). \end{aligned}$$

Definition:

$$\begin{aligned} \text{magnetische Dipoldichte} \quad \vec{M}(\vec{x}) &:= \frac{1}{2c} \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}), \quad (5.102) \\ \text{magnetisches Moment} \quad \vec{\mu} &:= \frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (5.103)$$

$\Rightarrow$ Vektorpotenzial

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{r^3}.$$

$\Rightarrow$ Magnetfeld für $r \neq 0$ (Teil 2, Übung 5, Aufgabe 5):

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{Dipol}} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{r^3} = \dots = \frac{3\vec{x} \vec{x} \cdot \vec{\mu} - \vec{\mu} r^2}{r^5}. \quad (5.104)$$

Tatsächlich impliziert ein Dipol im Ursprung noch einen distributionswertigen Term im Ursprung (siehe Scheck, 1.8.3):

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} = \frac{3\vec{x} \vec{x} \cdot \vec{\mu} - \vec{\mu} r^2}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \vec{\mu} \delta(\vec{x}). \quad (5.105)$$

Beispiel: Magnetisches Moment eines Flusses von Teilchen.

Gegeben: n punktförmige Teilchen, $i = 1, 2, \dots, n$, mit Ladungen q_i , Massen m_i und Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$.

Stromdichte

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i). \quad (5.106)$$

Einsetzen in Gl. (5.103) liefert

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) \\
&= \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n q_i \int d^3x \vec{x} \times \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2c} q_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2c m_i} \vec{l}_i.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

5.4.5 Magnetische Energiedichte und Energieinhalt

Gesucht: Energieinhalt einer magnetischen Feldkonfiguration im Vakuum.

Gegeben: Stationäre, lokalisierte Stromdichte $\vec{J}(\vec{x})$ und Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{x})$, aus dem $\vec{B}$ berechnet wird.

Analogie

Elektrostatik	Magnetostatik
$W_E = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}).$	$W_M = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\vec{J}(\vec{x})}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x}).$

Verwende Gl. (5.93), um Stromdichte durch $\vec{B}$ auszudrücken:

$$W_M = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}).$$

Partielle Integration mit

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{A} &= \epsilon_{ijk} (\nabla_j B_k) A_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j (B_k A_i) - \epsilon_{ijk} B_k \nabla_j A_i \\
&= \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) + \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}}.
\end{aligned}$$

Der erste Term trägt mit Hilfe des Gauß'schen Satzes zum Integral nicht bei. $\Rightarrow$

$$W_M = \int d^3x w_M(\vec{x}) \quad (5.108)$$

mit der magnetischen Energiedichte

$$w_M(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2(\vec{x}). \quad (5.109)$$

5.5 Zeitlich veränderliche Felder, Maxwell-Gleichungen

Bisher: Statik, d. h.

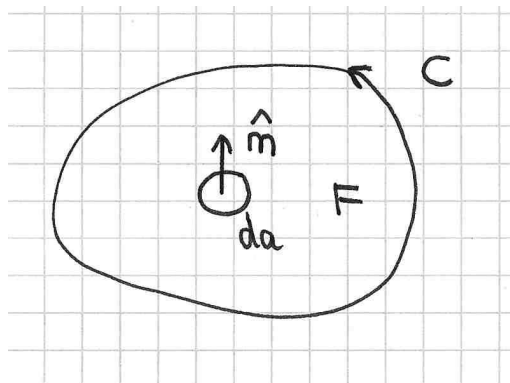
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= 4\pi\rho(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Es sieht so aus, als wären statische elektrische und magnetische Phänomene voneinander getrennt. Aber:

$$\begin{aligned} \text{IS} &\rightarrow \text{IS}' \\ \rho, \vec{J} = 0 &\rightarrow \rho', \vec{J}' \\ \vec{E}, \vec{B} = 0 &\rightarrow \vec{E}', \vec{B}'. \end{aligned}$$

5.5.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Betrachte Drahtschleife C , die eine Fläche F umrandet:



Faraday'sches Gesetz: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche F induziert eine Spannung.

Etwa:

- Rotation einer Drahtschleife in einem magnetischen Feld.
- Bewegung eines Dipolmagneten in die Schleife.

Quantitativ:

Magnetischer Fluss:

$$\Phi_m(t) = \int_F da \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x}).$$

Induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}} = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}'(t, \vec{x}').$$

$\vec{E}'$ bezieht sich auf das mit F verknüpfte Koordinatensystem.
Faraday'sches Induktionsgesetz (1831):

$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m(t)}{dt}. \quad (5.110)$$

Negatives Vorzeichen: Die Richtung des in C induzierten Stroms ist derart, dass der induzierte magnetische Fluss der zeitlichen Änderung des Flusses auf der rechten Seite entgegen wirkt (Lenz'sche Regel).

Differenzielle Form: Betrachte zeitunabhängige Fläche ($\vec{E}' \rightarrow \vec{E}$, $\hat{n}(t, \vec{x}) = \hat{n}(\vec{x})$) und wende Satz von Stokes an:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_F da \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} = -\frac{1}{c} \int_F da \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Da F beliebig ist, erhalten wir die homogene Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.111)$$

5.5.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Bisher:

$$\begin{aligned}\text{Coulomb:} \quad & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \text{Ampere:} \quad & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}, \\ \text{Faraday:} \quad & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \\ & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.\end{aligned}$$

Vorsicht: Bis auf das Faraday'sche Gesetz wurden alle Gleichungen aus Beobachtungen stationärer Prozesse hergeleitet.

Gültigkeit auch für zeitabhängige Prozesse?

Problem: Ampere'sches Gesetz liefert Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad \text{im Widerspruch zu} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwell 1864: Wandle Kontinuitätsgleichung mit Hilfe des Coulomb-Gesetzes in einen Divergenzterm um:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Ersetze im Ampere'schen Gesetz $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. $\Rightarrow$

1. Konsistenz mit Kontinuitätsgleichung.
2. Stationäre Phänomene wie bisher.
3. $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: Maxwell'scher Verschiebungsstrom.

$\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (5.112)$$

Beachte: Zeitliche Veränderung von $\vec{E}/\vec{B}$ verbunden mit $\vec{\nabla} \times \vec{B}/\vec{\nabla} \times \vec{E}$ (später: elektromagnetische Welle).

5.5.3 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Felder, Ladungsdichte und Stromdichte hängen nun von $\vec{x}$ und t ab:

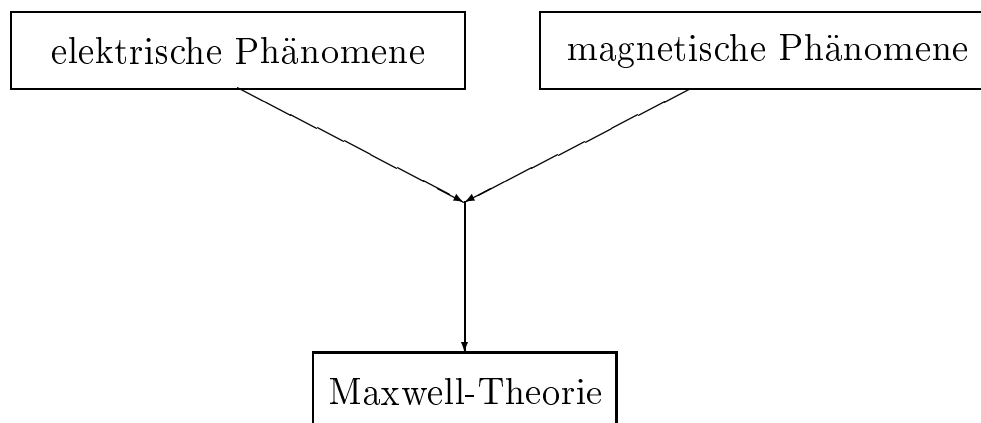
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{5.113}$$

+ Kontinuitätsgleichung

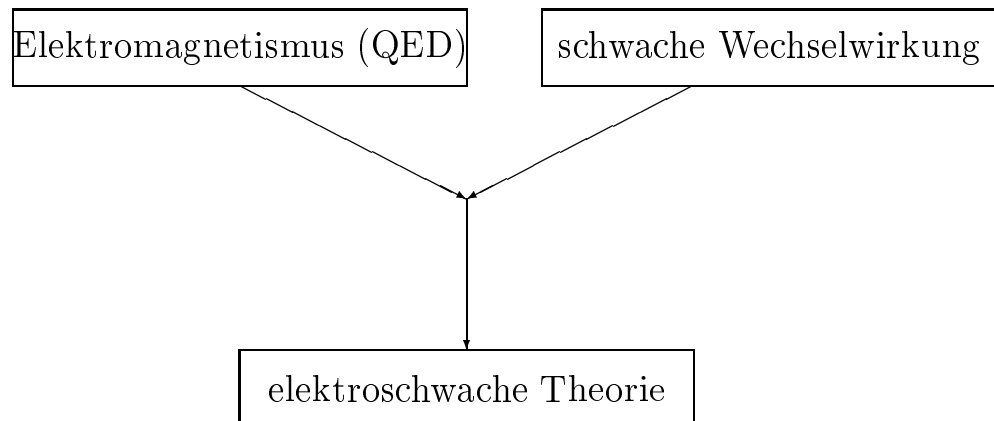
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

Bemerkung:

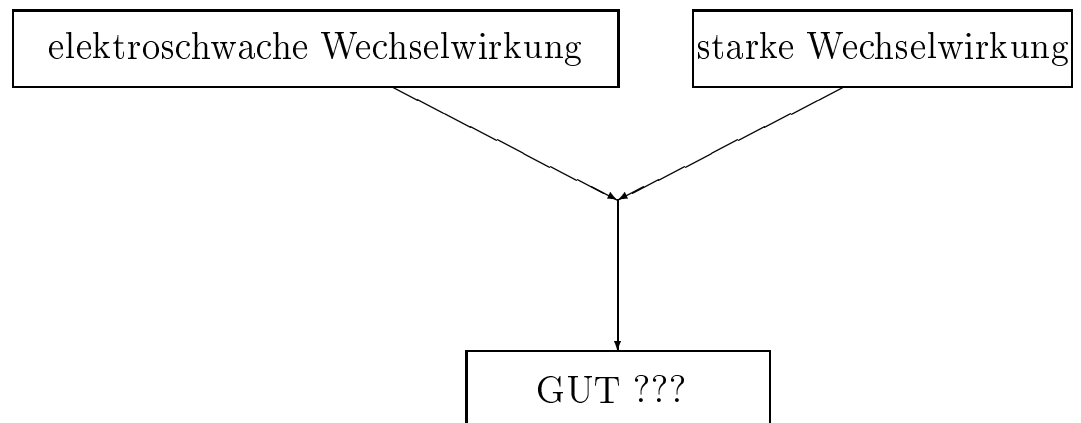
Die Maxwell'sche Theorie ist das Paradebeispiel für eine vereinheitlichte Theorie. Zunächst unterschiedlich wirkende Phänomene werden auf eine Theorie zurückgeführt.



Weinberg-Salam-Modell



Standard-Modell der Elementarteilchenphysik



GUT: Grand Unified Theory

Schließlich: Wie passt die Gravitation in dieses Bild?

5.5.4 Energiedichte, Poynting-Vektor und Poynting-Theorem

Betrachte Energiebilanz für ein System aus Feldern und n geladenen Punktteilchen.

Änderung der Energie der Teilchen:

$$\begin{aligned}
 dE_{\text{Mat}} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{L,i} \cdot d\vec{x}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n q_i \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_i dt \\
 &= \sum_{i=1}^n q_i \vec{E}(\vec{x}_i, t) \cdot \vec{v}_i dt.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

gilt

$$\frac{dE_{\text{Mat}}}{dt} = \int d^3x \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{J}(\vec{x}, t).$$

Wir eliminieren $\vec{J}$ mit Hilfe der Maxwell-Gleichung

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Verwende

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$$

mit $\vec{a} = \vec{E}$ und $\vec{b} = \vec{B}$:

$$\begin{aligned}
 \dots &= -\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{c}{4\pi} \vec{B} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} \\
 &= -\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2).
 \end{aligned}$$

Definition

$$\text{Energiedichte} \quad w_{\text{em}}(\vec{x}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2(\vec{x}, t) + \vec{B}^2(\vec{x}, t)],$$

$$\text{Poynting-Vektor} \quad S(\vec{x}, t) := \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t). \quad (5.114)$$

$\Rightarrow$ **Poynting-Theorem:**

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (5.115)$$

Interpretation:

Integration über Volumen V mit Oberfläche F :

$$\int_V d^3x \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Annahme: V zeitunabhängig. Satz von Gauß. $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3x w_{\text{em}}}_{E_{\text{em}}} + \int_F da \vec{S} \cdot \hat{n} = - \frac{dE_{\text{Mat}}}{dt},$$

oder

$$\frac{dE_{\text{em}}}{dt} + \frac{dE_{\text{Mat}}}{dt} = - \int_F da \vec{S} \cdot \hat{n}. \quad (5.116)$$

1. Betrachte abgeschlossenes System, das vollständig in V liegt. $\Rightarrow$ Oberflächenintegral verschwindet. $\Rightarrow$

$$E = E_{\text{em}} + E_{\text{Mat}} = \text{konst.}$$

2. Betrachte nun beliebiges, endliches Volumen. E_{em} kann sich dadurch ändern, dass

- (a) Energie auf die Teilchen übertragen wird, oder dass
- (b) elektromagnetische Energie die Oberfläche F passiert.

3. Beachte: Wir haben in beiden Fällen angenommen, dass die Teilchenzahl in V sich nicht ändert.

4. Interpretation: $\vec{S}$ = Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes.

5. Dimension:

$$[S] = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}.$$

5.5.5 Skalares und Vektorpotenzial

Führe Potenziale Φ und $\vec{A}$ dergestalt ein, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{-\vec{\nabla} \Phi} = 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

6 Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ werden auf 4 Felder Φ und $\vec{A}$ reduziert.

Feldgleichungen für Φ und $\vec{A}$ aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -4\pi\rho. \quad (5.119)$$

Verwende ([Teil 2, Übung 1, Aufgabe 1 \(b\)](#))

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad \Rightarrow \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

D. h. 4 gekoppelte partielle DGLen für 4 Felder Φ und $\vec{A}$.

Immer noch Freiheit in der Wahl von Φ und $\vec{A}$, denn: Gegeben sei eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$. Eine Eichtransformation

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad \Phi \mapsto \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (5.121)$$

lässt die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unverändert.

Wähle Satz von Potenzialen mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (5.122)$$

$(\Phi, \vec{A})$ erfüllen so genannte Lorenz-Bedingung (Lorenz-Eichungen).
 $\partial/\partial t$ Gl. (5.122) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

$\Rightarrow$ Vier entkoppelte inhomogene Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho, \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Gl. (5.123) + (5.122) äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen (5.113).

5.5.6 Eichtransformationen, Lorenz-Bedingung, Coulomb-Eichung

Annahme: Φ und $\vec{A}$ lösen Gl. (5.119) und (5.120).

Behauptung: Es lassen sich Potenziale Φ' und $\vec{A}'$ finden, die Lorenz-Bedingung erfüllen.

Begründung: Führe Eichtransformation durch

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda. \end{aligned}$$

Forderung:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta \Lambda.$$

$\Rightarrow \Lambda$ muss die inhomogene Wellengleichung

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

lösen (siehe Abschnitt 5.5.7).

Bemerkungen

1. Innerhalb der Klasse der Lorenz-Eichungen lassen sich noch eingeschränkt Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\Phi' &\rightarrow \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \\ \vec{A}' &\rightarrow \vec{A}' + \vec{\nabla} \Lambda\end{aligned}$$

durchführen, wobei

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

gelten muss.

2. Vorteil der Lorenz-Eichungen

- (a) Führen auf Wellengleichungen.
- (b) Kovariant

$$(A^\mu) = (\Phi, \vec{A}), \quad 0 = \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

D. h. erfüllt $A^\mu(x)$ in IS $\partial_\mu A^\mu(x)$, so gilt in IS' mit $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ für das transformierte Potenzial $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ in gleicher Form $\partial'_\mu A'^\mu(x') = 0$.

Definition der Coulomb-, Strahlungs- oder transversalen Eichung (nicht kovariant!):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (5.124)$$

Gl. (5.119) $\Rightarrow$

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.125)$$

$\Phi(\vec{x}, t)$ ist das instantane Coulomb-Potenzial.

Gl. (5.120) $\Rightarrow$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.126)$$

Spalte Stromdichte in transversale und longitudinale Anteile auf:

$$\vec{J} = \vec{J}_t + \vec{J}_l, \quad (5.127)$$

wobei

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{J}_l &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_t &= 0.\end{aligned}$$

Ohne Beweis (siehe Jackson, Abschnitt 6.5):

$$\vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi \vec{J}_l.$$

$\Rightarrow$ In der Coulomb-Eichung lässt sich die Wellengleichung für $\vec{A}$ ausschließlich durch die transversale Stromdichte ausdrücken:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}_t. \quad (5.128)$$

Deshalb „transversale Eichung“.

Spezialfall: $\rho = 0 \Rightarrow \Phi = 0$. $\vec{J} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned} \quad (5.129)$$

5.5.7 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

Gleichungen (5.123) (Lorenz-Eichungen) und (5.128) (Coulomb-Eichung) sind Wellengleichungen von der Form

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi F. \quad (5.130)$$

$F(\vec{x}, t)$: Quellterm.

Allgemeine Lösung:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{hom}}(\vec{x}, t) + \Psi_{\text{part}}(\vec{x}, t). \quad (5.131)$$

Ψ_{hom} : Allgemeine Lösung der homogenen DGL.

Ψ_{part} : Spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.132)$$

Separationsansatz

$$\Psi(\vec{x}, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t). \quad (5.133)$$

Einsetzen in Gl. (5.132) und Division durch $\Psi \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k_y^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-k_z^2} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{T''}{T}}_{-\omega^2} = 0. \quad (5.134)$$

$\Rightarrow$

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (5.135)$$

Exemplarisch:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0. \quad (5.136)$$

1. $k_x^2 > 0$:

$$X(x) = A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}.$$

2. $k_x = 0$:

$$X(x) = A_x + B_x x.$$

$B_x = 0$, damit Lösung endlich für $x \rightarrow \pm\infty$.

3. $k_x^2 < 0$: Setze $k_x = i\bar{k}_x$ mit $\bar{k}_x > 0$.

$$X(x) = A_x e^{-\bar{k}_x x} + B_x e^{\bar{k}_x x}.$$

$A_x = 0$, damit Lösung endlich für $x \rightarrow -\infty$. $B_x = 0$, damit Lösung endlich für $x \rightarrow \infty$.

Definiere

$$\omega = \omega(\vec{k}) = c|\vec{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (5.137)$$

Allgemeine reelle Lösung als Überlagerung

$$\Psi_{\text{hom}}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[a(\vec{k}) e^{-i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^*(\vec{k}) e^{+i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right] \quad (5.138)$$

mit komplexen Funktionen $a(\vec{k})$.

Beachte: DGL zweiter Ordnung in der Zeit. Typische Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, 0) &= G(\vec{x}), \\ \dot{\Psi}(\vec{x}, 0) &= H(\vec{x}).\end{aligned}$$

Die Überlagerung (5.138) enthält $\text{Re}(a(\vec{k}))$ und $\text{Im}(a(\vec{k}))$, um an $G(\vec{x})$ und $H(\vec{x})$ anzupassen.

Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi F.$$

Standardmethode: Führe Fourier-Transformation der Zeitabhängigkeit durch:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \\ F(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{F}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (5.139)$$

mit Umkehrungen

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Psi(\vec{x}, t) e^{i\omega t}, \\ \tilde{F}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\vec{x}, t) e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (5.140)$$

Einsetzen in inhomogene Gleichung +

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mapsto -\omega^2$$

(Fourier-Transformation führt Differentiationsoperatoren in Zahlen über) liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) + 4\pi \tilde{F}(\vec{x}, \omega) \right] e^{-i\omega t} = 0.$$

$\Rightarrow [\dots] = 0$, da Fourier-Transformation Norm erhält (siehe **Teil 2, Übung 4, Aufgabe 3**).

$\Rightarrow \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega)$ erfüllt die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) = -4\pi\tilde{F}(\vec{x}, \omega) \quad (5.141)$$

mit $k = \omega/c$.

Lösung mit der Methode der Green'schen Funktionen.

Gesucht: Green'sche Funktion $G_k(\vec{x}, \vec{x}')$ der Helmholtz-Gleichung mit

$$(\Delta + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (5.142)$$

Voraussetzung: Keine Randflächen mit besonderen Randbedingungen. $\Rightarrow$ Rotations- und Translationsinvarianz $\Rightarrow G_k$ kann nur von $R = |\vec{R}| = |\vec{x} - \vec{x}'|$ abhängen.

Beachte:

$$f(\vec{R}) = f(\vec{x} - \vec{x}') \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial R_j} \underbrace{\frac{\partial R_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ji}} = \frac{\partial f}{\partial R_i}.$$

Verwende **Teil 2, Übung 2, Aufgabe 3**:

$$\begin{aligned} \Delta G_k(R) &= \Delta_R G_k(R) \\ &= \frac{d^2 G_k(R)}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dG_k(R)}{dR} = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k(R)). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k(R)) + k^2 G_k(R) = -4\pi\delta(\vec{R}). \quad (5.143)$$

1. $R \neq 0$:

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k(R)) + k^2 (RG_k(R)) = 0.$$

$k > 0$

$$RG_k(R) = A_+ e^{ikR} + A_- e^{-ikR}.$$

2. k fest. Für $R \rightarrow 0$ gilt $kR \rightarrow 0$. Gl. (5.143) geht in Radialanteil der Poisson-Gleichung über $\Rightarrow$

$$\lim_{kR \ll 1} G_k(R) = \frac{1}{R}.$$

⇒ Green'sche Funktion der Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned}
 G_k(|\vec{x} - \vec{x}'|) &= A_+ G_k^{(+)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) + A_- G_k^{(-)}(|\vec{x} - \vec{x}'|), \\
 A_+ + A_- &= 1, \\
 G_k^{(\pm)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) &= \frac{e^{\pm i k |\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.
 \end{aligned} \tag{5.144}$$

Green'sche Funktion der vollen Wellengleichung

Gesucht: Green'sche Funktion für

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \tag{5.145}$$

Betrachte Fourier-Transformation

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{G}(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{5.146}$$

Linke Seite von Gl. (5.145):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\Delta + k^2) \tilde{G}(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') e^{-i\omega t}.$$

Rechte Seite von Gl. (5.145):

$$-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}.$$

⇒ DGL für $\tilde{G}$:

$$(\Delta + k^2) \tilde{G}(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{5.147}$$

Verwende Basislösung aus Gl. (5.144). ⇒

$$\tilde{G}^{(\pm)}(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t'} G_k^{(\pm)}(|\vec{x} - \vec{x}'|), \quad \omega = c k. \tag{5.148}$$

Einsetzen in Gl. (5.145)

$$\begin{aligned}
 G^{(\pm)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega(t'-t)} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
 &= \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t' \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}}_{\delta(\dots)} \\
 &= \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta \left[t - \left(t' \pm \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.149}$$

Lösungen der inhomogenen Wellengleichung

$$\Psi^{(\pm)}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G^{(\pm)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') F(\vec{x}', t'). \tag{5.150}$$

(Siehe **Teil 2, Übung 6, Aufgabe 1**).

Physikalische Interpretation

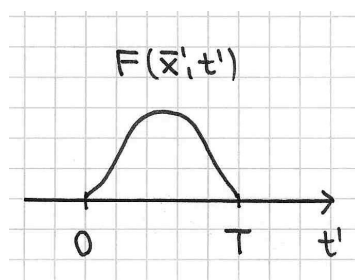
1. Retardierte Green-Funktion $G^{(+)}$

δ -Funktion $\Rightarrow$

$$t = t' + \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|, \quad \text{d. h.} \quad t > t'. \tag{5.151}$$



Gegeben: Zeitlich und räumlich lokalisierte Quelle $F(\vec{x}', t')$



$$\begin{aligned}
 F(\vec{x}', t') &= 0 \\
 \text{für } t' &< 0 \text{ und} \\
 t' &> T.
 \end{aligned}$$

Annahme: Für $t' = -\infty$ lag schon ein gewisser Anfangszustand $\Psi_{\text{in}}(\vec{x}, -\infty,)$ vor (in für incoming), der Lösung der homogenen Gleichung ist.

Vollständige Lösung:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{in}}(\vec{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') F(\vec{x}', t'). \quad (5.152)$$

Das einlaufende Signal ist schon bevor die Quelle funkt vorhanden. Quelle liefert zusätzliche Beiträge, aber nur für t , die Gl. (5.151) erfüllen: Kausale Retardierung (Verspätung).

2. Avancierte Green-Funktion $G^{(-)}$

δ -Funktion $\Rightarrow$

$$t = t' - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|, \quad \text{d. h.} \quad t < t'. \quad (5.153)$$

Widerspruch zu Kausalität? Nein, denn:

Gegeben sei ein auslaufender Zustand $\Psi_{\text{out}}(\vec{x}, \infty)$ (out für outgoing), der sich für $t \rightarrow \infty$ einstellt.

Vollständige Lösung:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{out}}(\vec{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G^{(-)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') F(\vec{x}', t'). \quad (5.154)$$

Kein Beitrag von der Quelle für $t \neq t' - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|$. Insbesondere keine Beiträge mehr, wenn Quelle bereits abgeschaltet wurde.

$G^{(-)}$ erzeugt „rückwärts“ die Anteile, die von $F(\vec{x}', t')$ erzeugt werden, damit sich in ferner Zukunft $\Psi_{\text{out}}(\vec{x}, \infty)$ einstellt.

5.5.8 Ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum

Annahme: $\rho = 0$ und $\vec{J} = 0$. $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5.155)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (5.156)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.157)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.158)$$

Behauptung: Jede Komponente von $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und jede Komponente von $\vec{B}(\vec{x}, t)$ erfüllt eine Wellengleichung vom Typ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{x}, t) - \Delta f(\vec{x}, t) = 0. \quad (5.159)$$

Beweis: Betrachte $\vec{\nabla} \times$ Gl. (5.157):

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}. \end{aligned}$$

Für $\vec{B}$ analog.

Die Wellengleichung ist eine lineare Gleichung in der gesuchten Funktion $f(\vec{x}, t)$. Es gilt das Superpositionsprinzip:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}, t) \text{ und } f_2(\vec{x}, t) \text{ Lösungen} &\Rightarrow \\ c_1 f_1(\vec{x}, t) + c_2 f_2(\vec{x}, t) \text{ mit } c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } c_i \in \mathbb{C} &\text{ Lösung.} \end{aligned}$$

Monochromatische, ebene Welle (harmonische Lösung)

$$f_{\vec{k}}^{\pm}(\vec{x}, t) = e^{\mp i \omega t} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (5.160)$$

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (5.161)$$

$\vec{k}$: Wellenvektor,

k : Wellenzahl,

λ : Wellenlänge mit $k = 2\pi/\lambda$ (Periode der Änderung in $\hat{k}$ -Richtung),

$\omega = 2\pi\nu$: Kreisfrequenz,

Gl. (5.161) $\Rightarrow c = \lambda\nu$.

Der Zusammenhang $\omega = \omega(\vec{k})$ heißt Dispersionsrelation.

Beispiel: $\vec{k} = k\hat{e}_x$.

Allgemeine Lösung zu diesem Wellenzahlvektor:

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = c_+ e^{ik(x - ct)} + c_- e^{ik(x + ct)}.$$

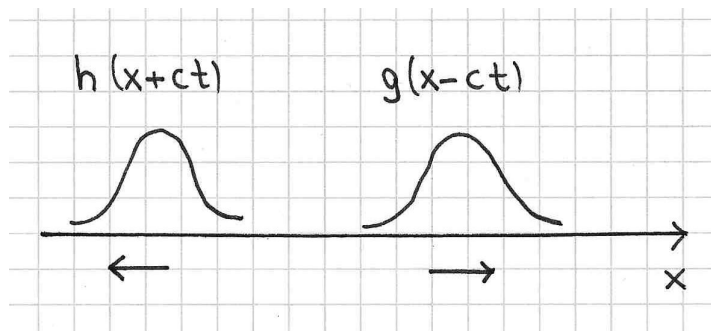
Beliebige Linearkombination:

$$g(x - ct) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{g}(k) e^{ik(x - ct)}, \quad (5.162)$$

$$h(x + ct) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{h}(k) e^{ik(x + ct)}. \quad (5.163)$$

Definition: Eine Welle heißt eben, wenn sie nur in einer Richtung vom Ort abhängt.

g und h unterscheiden sich durch die Laufrichtung: g läuft nach rechts, h nach links.



Ansatz für elektrisches bzw. magnetisches Feld:

$$\vec{E}_c(\vec{x}, t) = \vec{e} e^{i(k\hat{n} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (5.164)$$

$$\vec{B}_c(\vec{x}, t) = \vec{b} e^{i(k\hat{n} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (5.165)$$

$\vec{k} = k\hat{n}$: $\hat{n}$ Ausbreitungsrichtung, $k = |\vec{k}|$.

Index c für komplex. Physikalische Felder am Ende als Realteil (s. u.).

$\vec{e}$ und $\vec{b}$ sind konstante, möglicherweise komplexe Vektoren.

Bedingungen für $\vec{e}$ und $\vec{b}$:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \underbrace{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\omega t}} = \dots$$

Verwende

$$\begin{aligned} \nabla_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} &= ik_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = i\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \\ \dots &= i(\vec{b} \cdot \vec{k}) \underbrace{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot \hat{n} = 0.$$

$$\text{Analog: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \hat{n} = 0.$$

Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld sind transversale Felder: Sie stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

Wie sind die beiden Felder relativ zueinander ausgerichtet?

Setze Gl. (5.164) und (5.165) in Gl. (5.157) ein und dividiere durch Exponentialfunktion (immer ungleich Null). $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ik\hat{n} \times \vec{e} + \frac{1}{c}(-i\omega)\vec{b} &= 0, \\ \text{Gl. (5.161)} \quad \vec{b} &\stackrel{\Rightarrow}{=} \hat{n} \times \vec{e}. \end{aligned} \quad (5.166)$$

Wählen wir $\vec{e}$ und $\vec{b}$ reell, so bilden $\{\vec{e}, \hat{n}, \vec{b}\}$ ein rechtshändiges Dreibein.

Beispiele: Es sei $\hat{n} = \hat{e}_z$.

1. $\vec{e} = c_1 \hat{e}_x$, c_1 komplexe Zahl.

Physikalisches Feld als Realteil des komplexen Feldes:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left(\vec{E}_c(\vec{x}, t) \right) = \text{Re} \left(|c_1| e^{i\varphi_1} \hat{e}_x e^{i(kz - \omega t)} \right) \\ &= |c_1| \hat{e}_x \text{Re} \left(e^{i(kz - \omega t + \varphi_1)} \right) \\ &= |c_1| \hat{e}_x \cos(\omega t - \varphi_1 - kz). \end{aligned}$$

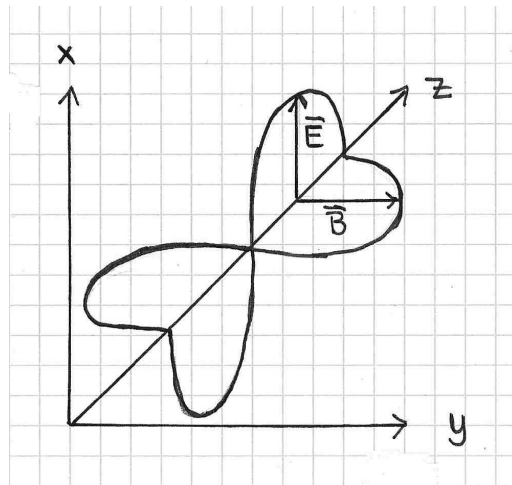
Elektrisches Feld schwingt in x -Richtung.

$$\vec{b} = \hat{n} \times \vec{e} = c_1 \hat{e}_z \times \hat{e}_x = c_1 \hat{e}_y.$$

Physikalisches Magnetfeld schwingt in y -Richtung:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = |c_1| \hat{e}_y \cos(\omega t - \varphi_1 - kz).$$

Lineare Polarisation = $\vec{E}$ -Feld schwingt in einer Richtung ($\vec{B}$ -Feld dazu orthogonal).



2. $\vec{e} = c_2 \hat{e}_y$, c_2 komplexe Zahl.

Elektrisches Feld schwingt in y -Richtung.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = |c_2| \hat{e}_y \cos(\omega t - \varphi_2 - kz).$$

$$\vec{b} = \hat{n} \times \vec{e} = c_2 \hat{e}_z \times \hat{e}_y = -c_2 \hat{e}_x.$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = -|c_2| \hat{e}_x \cos(\omega t - \varphi_2 - kz).$$

3. Allgemeinster Fall durch lineare Superposition:

$$\begin{aligned} \vec{E}_c(\vec{x}, t) &= (c_1 \hat{e}_x + c_2 \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}, \\ \vec{B}_c(\vec{x}, t) &= \hat{e}_z \times \vec{E}_c(\vec{x}, t), \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= \operatorname{Re} \left(\vec{E}_c(\vec{x}, t) \right) \\ &= |c_1| \cos(\omega t - \varphi_1 - kz) \hat{e}_x + |c_2| \cos(\omega t - \varphi_2 - kz) \hat{e}_y. \end{aligned}$$

Betrachte $\vec{E}$ für $z = 0$. Wähle Zeitnullpunkt so, dass $\varphi_1 = 0$. Definiere $\varphi := \varphi_2$.

$$\vec{E}(x, y, z = 0, t) = |c_1| \cos(\omega t) \hat{e}_x + |c_2| \cos(\omega t - \varphi) \hat{e}_y.$$

Mit $\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z = 0, t) &= \cos(\omega t) [|c_1| \hat{e}_x + |c_2| \cos(\varphi) \hat{e}_y] \\ &\quad + \sin(\omega t) |c_2| \sin(\varphi) \hat{e}_y. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Diskussion

- (a) Im allgemeinsten Fall läuft die Spitze von $\vec{E}$ auf einer Ellipse in der (x, y) -Ebene.
- (b) Spezialfälle $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$:

$$\vec{E}(x, y, z = 0, t) = \cos(\omega t) (|c_1| \hat{e}_x \pm |c_2| \hat{e}_y),$$

lineare Polarisation.

- (c) $|c_1| = |c_2|$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(\omega t \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sin(\omega t).$$

Rechtszirkulare Polarisation: Spitze von $\vec{E}$ läuft relativ zur z -Achse im Uhrzeigersinn auf einem Kreis mit Radius $|c_1|$:

$$\vec{E}(x, y, z = 0, t) = |c_1| [\cos(\omega t) \hat{e}_x + \sin(\omega t) \hat{e}_y].$$

Linkszirkulare Polarisation: Spitze von $\vec{E}$ läuft relativ zur z -Achse gegen den Uhrzeigersinn auf einem Kreis mit Radius $|c_1|$:

$$\vec{E}(x, y, z = 0, t) = |c_1| [\cos(\omega t) \hat{e}_x - \sin(\omega t) \hat{e}_y].$$

4. Poynting-Vektor (Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes, siehe Gl. (5.114)):

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Teil 2, Übung 7, Aufgabe 1:

$$\vec{B} = \hat{e}_z \times \vec{E} = \dots = |c_1| \cos(\omega t - kz) \hat{e}_y - |c_2| \cos(\omega t - \varphi - kz) \hat{e}_y.$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \dots$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \hat{e}_z \left[|c_1|^2 \cos^2(\omega t - kz) + |c_2|^2 \cos^2(\omega t - \varphi - kz) \right]. \quad (5.168)$$

Zeitlicher Mittelwert (Teil 2, Übung 7, Aufgabe 1):

$$\begin{aligned} T &:= \frac{2\pi}{\omega}, \\ \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{S}(t) \\ &= \dots \\ &= \frac{c}{8\pi} \hat{e}_z (|c_1|^2 + |c_2|^2). \end{aligned} \quad (5.169)$$

- (a) Energiestromdichte zeigt in Ausbreitungsrichtung.
- (b) Zeitlicher Mittelwert unabhängig von ω !
- (c) Zeitlicher Mittelwert proportional zum Amplitudenbetragsquadrat.

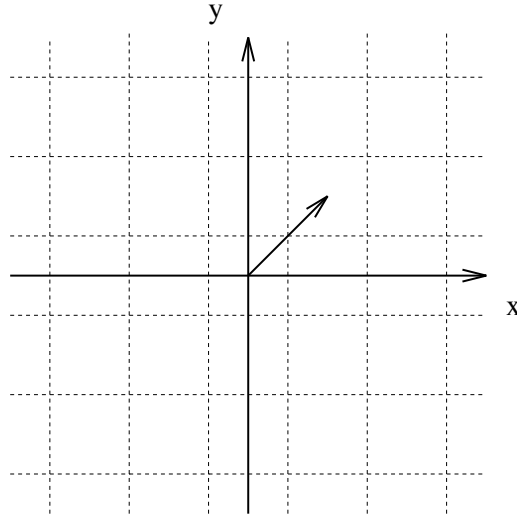
5.6 Lagrange-Formalismus für das elektromagnetische Feld*

5.6.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Voraussetzung: Kenntnis des Lagrange-Formalismus in der Punktmechanik.

Kontinuierliche Systeme:

1. Führe Feld $\Phi(\vec{x}, t)$ als dynamische Variable ein.
2. Unterteile den dreidimensionalen Raum in Zellen mit Volumen δV . Kennzeichne jede Zelle $Z_{\vec{r}}$ durch ein Tripel $\vec{r}$ von ganzen Zahlen:



3. Dynamische Variable $\Phi_{\vec{r}}(t)$: Mittelwert von $\Phi(\vec{x}, t)$ in $Z_{\vec{r}}$.

4. Lagrange-Funktion

$$L(t) = \sum_{\vec{r}} L_{\vec{r}}(t) = \sum_{\vec{r}} \delta V \mathcal{L}_{\vec{r}} \xrightarrow{\delta V \rightarrow 0} \int d^3x \mathcal{L}. \quad (5.170)$$

$\mathcal{L}_{\vec{r}}$: Mittelwert der Lagrange-Dichte $L_{\vec{r}}(t)/\delta V$ in der durch $\vec{r}$ bezeichneten Zelle.

5. Insbesondere fassen wir $\vec{x}$ als eine Art „Parameter“ auf.
 $\Rightarrow$ Unendlich viele Freiheitsgrade. Symbolisch

$$\begin{aligned} q_i(t) &\rightarrow \Phi(\vec{x}, t), \\ q &\rightarrow \Phi, \\ i &\rightarrow \vec{x}, \\ t &\rightarrow t. \end{aligned}$$

$$(x^\mu) = (ct, \vec{x}) \xrightarrow{\text{natürliche Einheiten}} (t, \vec{x}).$$

Betrachte die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ eines skalaren Feldes $\Phi(x)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)), \quad (5.171)$$

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right).$$

Hier: Keine explizite Abhängigkeit der Lagrange-Dichte von x .¹
Die zugehörige Lagrange-Funktion $L(t)$ lautet

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)). \quad (5.172)$$

Die klassische Bewegungsgleichung für $\Phi(x)$ folgt aus dem Hamilton'schen Prinzip der kleinsten Wirkung für das Wirkungsfunktional

$$S[\Phi] = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))}_{\int_R d^4x}. \quad (5.173)$$

Wir definieren

$$\Phi_\epsilon(x) = \Phi(x) + \epsilon h(x) = \Phi(x) + \delta \Phi(x) \quad (5.174)$$

mit $h(x) = 0$ für $x \in \partial R$, dem Rand von R . Sei

$$F(\epsilon) = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi(x) + \epsilon h(x), \partial_\mu \Phi(x) + \epsilon \partial_\mu h(x)), \quad (5.175)$$

so dass $F(0) = S[\Phi]$. Wir entwickeln bis zum linearen Term in ϵ

$$F(\epsilon) = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + \epsilon \int_R d^4x \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) + O(\epsilon^2)$$

und verlangen nun

$$\delta S[\Phi] = F'(0) \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.176)$$

Damit erhalten wir

$$0 = \int_R d^4x \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right)$$

und machen beim zweiten Term von der Produktregel Gebrauch:

$$\partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \mathcal{D}_\mu \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) - h \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi}.$$

¹Manche Autoren verwenden Φ_μ anstelle von $\partial_\mu \Phi$.

Hierbei gilt

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \partial_\mu \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \partial_\mu \partial_\nu \Phi \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \Phi}.$$

Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} & \int_R d^4x \mathcal{D}_\mu \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} \left(h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right) + \dots \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \underbrace{\left[h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right]_{t_1}^{t_2}}_{0, \text{ da } h(t_1, \vec{x}) = h(t_2, \vec{x}) = 0} \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \underbrace{\left[h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{0, \text{ da } h(t, \vec{x}) = 0 \text{ f\"ur } x \rightarrow \pm\infty} + \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bedingung

$$0 = \int_R d^4x h(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right). \quad (5.177)$$

- Fundamentallemma der Variationsrechnung:

Wenn das Integral $\int_{x_1}^{x_2} h(x)g(x)dx$ gleich null ist für beliebige stetige Funktionen $h(x)$ mit stetiger Ableitung und $h(x_1) = h(x_2) = 0$, dann gilt $g(x) = 0$ in $[x_1, x_2]$.

Wir wenden nun das Fundamentallemma der Variationsrechnung auf Gl. (5.177) an und erhalten somit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = 0, \quad (5.178)$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} - \dots = 0.$$

- Vorsicht: Praktisch jedes Physikbuch schreibt in Gl. (5.178) ∂_μ anstelle von $\mathcal{D}_\mu$ mit dem Verständnis, dass bzgl. jeder x^μ -Abhängigkeit im Sinne einer totalen Ableitung differenziert werden soll und nicht nur bzgl. der *expliziten* x^μ -Abhängigkeit. Wir folgen von nun an dieser Konvention und schreiben ∂_μ anstelle von $\mathcal{D}_\mu$.

Hängt $\mathcal{L}$ von n Feldern $\Phi_i(x)$ ab, müssen wir eine unabhängige Variation bzgl. n Funktionen durchführen. Dazu definieren wir

$$\Phi_{i,\epsilon_i}(x) = \Phi_i(x) + \epsilon_i h_i(x) = \Phi_i + \delta \Phi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.179)$$

und

$$F(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = S[\Phi_{i,\epsilon_i}]. \quad (5.180)$$

Wir fordern wieder ein Extremum

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.181)$$

Dies führt auf n Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.182)$$

5.6.2 Freies, reelles, skalares Feld Φ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m^2 \Phi^2). \quad (5.183)$$

Der metrische Tensor ermöglicht es, Indizes von „oben“ nach

„unten“ zu senken (und umgekehrt zu heben)

$$g = (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = g_\mu{}^\nu a_\nu = g^\nu{}_\mu a_\nu = g_\nu{}^\mu a^\nu,$$

$$\frac{\partial \partial_\mu \Phi}{\partial \partial_\rho \Phi} = g_\mu{}^\rho = g^\rho{}_\mu = g_\mu^\rho.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -m^2 \Phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_\mu{}^\rho \partial_\nu \Phi + \partial_\mu \Phi g_\nu{}^\rho) \\ &= \frac{1}{2} (g_\mu{}^\rho \partial^\mu \Phi + \partial^\nu \Phi g_\nu{}^\rho) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\rho \Phi + \partial^\rho \Phi) = \partial^\rho \Phi = f^\rho(x, \Phi, \partial_\mu \Phi), \\ \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} &= \underbrace{\frac{\partial f^\rho}{\partial x^\rho}}_0 + \underbrace{\partial_\rho \Phi \frac{\partial f^\rho}{\partial \Phi}}_0 + \partial_\rho \partial_\sigma \Phi \underbrace{\frac{\partial f^\rho}{\partial \partial_\sigma \Phi}}_{\frac{\partial \partial^\rho \Phi}{\partial \partial_\sigma \Phi} = g^\rho{}_\sigma} \\ &= \square \Phi. \end{aligned}$$

„Schnelle“ Rechnung:

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} = \partial_\rho \partial^\rho \Phi = \square \Phi.$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square + m^2) \Phi = 0. \quad (5.184)$$

- Bemerkung: Beide Methoden liefern dasselbe Resultat.

Dazu betrachten wir folgende allgemeine Struktur

$$\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi.$$

„Schnelle“ Methode unter Verwendung der Ketten- und Produktregeln:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi) \\ &= m \Phi^{m-1} \partial_\mu \Phi \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi \\ & \quad + \underbrace{\Phi^m (\partial_\mu \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_\mu \partial_{\mu_n} \Phi)}_{n \text{ Summanden}}. \end{aligned}$$

„Ausführliche“ Methode:

$$\begin{aligned} & (\partial_\mu \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \partial_\mu \partial_\nu \Phi \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \Phi}) (\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi) \\ &= m \Phi^{m-1} \partial_\mu \Phi \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi \\ & \quad + \underbrace{\Phi^m \partial_\mu \partial_\nu \Phi (g_{\mu_1}^\nu \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots g_{\mu_n}^\nu)}_{\Phi^m (\partial_\mu \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_\mu \partial_{\mu_n} \Phi)}. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung lassen sich als Superposition folgendermaßen darstellen

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^*(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]$$

mit

$$k \cdot x = k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad k_0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}.$$

5.6.3 Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einer vorgegebenen äußeren Stromdichte J^μ

Im Folgenden keine natürlichen Einheiten.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} J_\mu A^\mu, \quad (5.185)$$

wobei

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ (F^{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Symbolisch

$$(T^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right), \quad (T^\mu{}_\nu) = (T^{\mu\rho} g_{\rho\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline c & -d \end{array} \right),$$

$$(T_\mu{}^\nu) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline -c & -d \end{array} \right), \quad (T_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline -c & d \end{array} \right)$$

und damit

$$(F_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array} \right).$$

In Worten: $F_{\mu\nu}$ folgt aus $F^{\mu\nu}$ durch die Ersetzung $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ und $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$.

Zur Erinnerung:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.187)$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \partial_\sigma A_\rho} = \frac{\partial}{\partial \partial_\sigma A_\rho} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = g_\mu{}^\sigma g_\nu{}^\rho - g_\nu{}^\sigma g_\mu{}^\rho,$$

$$\frac{\partial}{\partial \partial_\sigma A_\rho} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2(g_\mu{}^\sigma g_\nu{}^\rho - g_\nu{}^\sigma g_\mu{}^\rho) F^{\mu\nu} = 4F^{\sigma\rho}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\sigma A_\rho} = -\frac{4\pi}{c} J^\rho + \partial_\sigma F^{\sigma\rho} = 0$$

und damit die kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen [siehe Gl. (5.4)]

$$\partial_\sigma F^{\sigma\rho} = \frac{4\pi}{c} J^\rho. \quad (5.188)$$

Dies entspricht

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (5.189)$$

Homogene Gleichungen automatisch erfüllt [siehe Gl. (5.7)].

Kapitel 6

Nichtrelativistische Quantenmechanik

Ziel: Beschreibung der nichtrelativistischen Quantentheorie stabiler Teilchen durch die Schrödinger-Gleichung.

6.1 Grenzen der klassischen Physik

Es existiert eine große Zahl experimenteller Befunde, die sich im Rahmen der klassischen Physik nicht deuten lassen.

6.1.1 Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

Bisher: Klassische Maxwell-Theorie. Elektromagnetische Strahlung besitzt Welleneigenschaften.

Frequenzverteilung der Hohlraumstrahlung

Betrachte Hohlraum der Temperatur T , in dem Strahlungsgleichgewicht herrsche (etwa Würfel mit Metallflächen).

$u(\omega)$: Energiedichte (Energie pro Volumen- und Frequenzeinheit).

$u(\omega)d\omega$: Energie pro Volumeneinheit im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$.

Klassisches Resultat (Rayleigh-Jeans-Gesetz):

$$u(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2.$$

k_B : Boltzmann-Konstante.

Empirisch nur für kleine Werte von ω erfüllt.

Problem: „Ultraviolett Katastrophe“

$$\int_0^\infty d\omega u(\omega) = \infty,$$

d. h. Hohlraum müsste unendlichen Energieinhalt besitzen.

Planck (1900)

$$\boxed{\text{Planck'sches Strahlungsgesetz}} \quad u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (6.1)$$

Ableitung mit der Hypothese, dass Energie von den Wänden an die Strahlung nur in Vielfachen von

$$\hbar\omega = h\nu,$$

nämlich $E_n = n\hbar\omega$ abgegeben wird.

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054\,571\,628(53) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (6.2)$$

Planck-Konstante, (Planck'sches) Wirkungsquantum.

Photoelektrischer Effekt

Bestrahlung einer Metallfolie mit Licht der Frequenz ω (Hertz, 1887). Beobachtung: Emission von Elektronen, erst wenn

$$\omega > \omega_{\min}.$$

Interpretation (Einstein, 1900): Licht besteht aus Energiequanten (Photonen) der Energie $\hbar\omega$, so dass

$$E_e = \frac{m_e}{2} v_e^2 = \hbar\omega - W \quad (W = \text{Austrittsarbeit, materialabhängig}).$$

Klassisch nicht erklärbar: Energie einer klassischen elektromagnetischen Welle hängt (quadratisch) von der Amplitude aber nicht von ω ab (siehe Gl. (5.169)).

Interpretation: Licht besteht aus Photonen der Energie $E =$

$\hbar\omega$, der Geschwindigkeit c und einer Fortpflanzungsrichtung $\hat{k}$.

Masse des Photons aus SRT (siehe Gl. (4.25)):

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2},$$

$$\vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} c^2}{\sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2}}.$$

Wegen $|\vec{v}| = c$ gilt $m_\gamma = 0 \Rightarrow E = |\vec{p}|c$.

Andererseits $E = \hbar\omega = \hbar c |\vec{k}| \Rightarrow |\vec{p}| = \hbar |\vec{k}|$.

Schließlich $\vec{p} \parallel \vec{k} \Rightarrow \vec{p} = \hbar \vec{k}$.

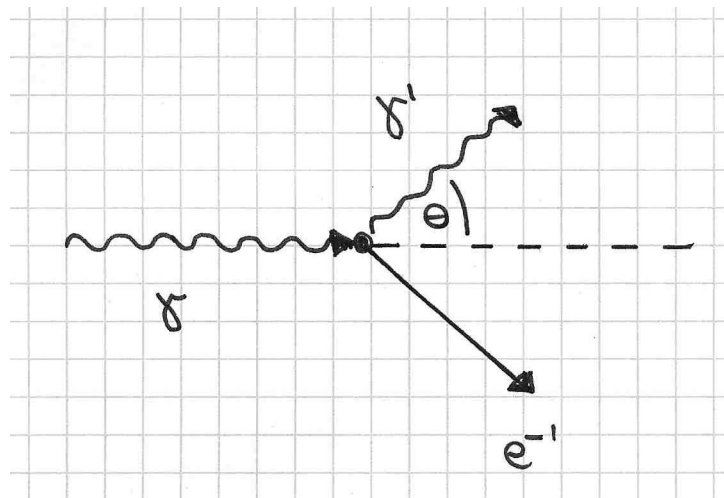
Zusammengefasst:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (6.3)$$

Compton-Effekt

Compton (1923)

Streuung von Röntgen-Strahlen an einem Elektron:



Energie- und Impulserhaltung im Laborsystem:

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{(m_e c^2)^2 + \vec{p}'^2 c^2},$$

$$\hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}' + \vec{p}'.$$

Teil 2, Übung 7, Aufgabe 2: Frequenz des gestreuten Photons in Abhängigkeit von der Frequenz des einlaufenden Photons und

des Streuwinkels:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} [1 - \cos(\theta)]} \leq \omega. \quad (6.4)$$

Führt zu einer Vergrößerung der Wellenlänge:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \dots = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2\lambda_e \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (6.5)$$

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} : \quad \text{Compton-Wellenlänge des Elektrons.}$$

$$\lambda_e = \frac{\lambda_e}{2\pi} = 3,861\,592\,6459(53) \times 10^{-13} \text{ m.}$$

Beachte: $\Delta\lambda$ ist

1. unabhängig von der Frequenz,
2. proportional zu $1/m_e$,
3. proportional zu $\sin^2(\theta/2)$.

6.1.2 Welleneigenschaften von Materie

De Broglie (1923/24):

Ordne materiellen Teilchen (z. B. Elektron) mit den Teilcheneigenschaften Gesamtenergie E und Impuls $p = |\vec{p}|$ die Welleneigenschaften Frequenz

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad (6.6)$$

und Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (6.7)$$

zu.

Davisson und Germer (1927): Reflexion eines Elektronenstrahls an einem Nickelkristall führt zu Beugungserscheinungen.

6.1.3 Dualismus Teilchen-Welle

Fazit: Elektronen und Photonen zeigen in verschiedenen Experimenten Teilchen- *und* Wellencharakter. Die klassischen Modelle Welle und Teilchen sind unvereinbar. $\Rightarrow$ Neues theoretisches Konzept erforderlich.

6.1.4 Diskrete Zustände

- Quantelung atomarer Bindungszustände, z. B. diskrete Energien des Wasserstoffatoms:

$$E_n \approx -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Abstrahlung von Energie durch Emission von Photonen
- Quantisierung des Drehimpulses

6.1.5 Äquivalente Formulierungen der Quantenmechanik

Es existieren mathematisch äquivalente Zugänge zur Quantenmechanik:

1. Heisenberg (1925): Formulierung in Form von Matrizen (Matrixelemente von hermiteschen Operatoren)
2. Schrödinger (1926): Wellenmechanik
3. Feynman (1948): Pfadintegralformulierung (Jedem Pfad in der Raum-Zeit ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude zugeordnet.)

6.2 Wellenfunktion und Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens

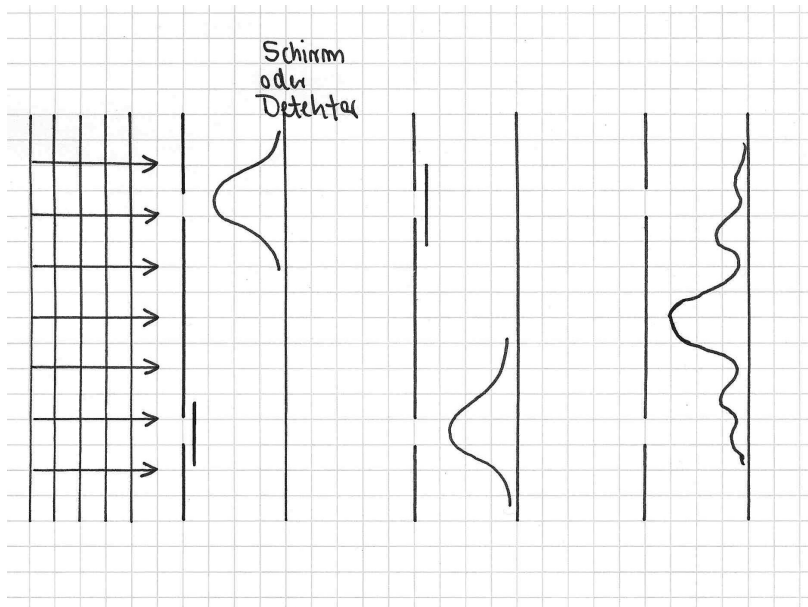
6.2.1 Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Beschreibung eines freien Elektrons durch die Wellenfunktion

$$\Psi(\vec{x}, t) = C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}. \quad (6.8)$$

Physikalische Interpretation der Wellenfunktion?

Betrachte idealisiertes Beugungsexperiment für Elektroneninterferenz:



Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Born, 1926): Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}, t)$ liefert die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 \quad (6.9)$$

dafür, dass das Elektron an der Stelle $\vec{x}$ zur Zeit t auftritt. Also:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) d^3x &= |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x \\ &= \text{Wahrscheinlichkeit, das Elektron am Ort } \vec{x} \\ &\quad \text{im Volumenelement } d^3x \text{ zu finden.} \end{aligned}$$

Vorsicht: Hierbei handelt es sich nicht um die Dichteverteilung eines ausgedehnten Elektrons (ursprüngliche Interpretation Schrödingers).

Beachte: Vorstellung, dass von Spalt 1 bzw. 2 Elektronenwellen ausgehen $\Rightarrow$

1. Spalt 2 geschlossen: $\rho(\vec{x}, t) = |\Psi_1(\vec{x}, t)|^2 = \rho_1(\vec{x}, t)$.
2. Spalt 1 geschlossen: $\rho(\vec{x}, t) = |\Psi_2(\vec{x}, t)|^2 = \rho_2(\vec{x}, t)$.
3. Beide Spalte offen: $\rho(\vec{x}, t) = |\Psi_1(\vec{x}, t) + \Psi_2(\vec{x}, t)|^2 \neq \rho_1(\vec{x}, t) + \rho_2(\vec{x}, t)$.
4. Interferenz entsteht unabhängig von der Strahlintensität, also auch wenn jeweils nur ein Elektron „unterwegs“ ist, d. h. kein Effekt aufgrund der Wechselwirkung verschiedener Elektronen miteinander.

6.2.2 Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen

F: Welcher Gleichung muss $\Psi(\vec{x}, t)$ genügen?

Anforderungen

1. Aus gegebenem $\Psi(\vec{x}, t_0)$ soll sich $\Psi(\vec{x}, t)$ für alle Zeiten t berechnen lassen. $\Rightarrow$ DGL erster Ordnung in t .
2. Superpositionsprinzip: Sind Ψ_i ($i = 1, 2$) Lösungen, dann soll auch $\Psi_1 + \Psi_2$ Lösung sein. $\Rightarrow$ DGL linear in Ψ .
3. Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

$$\int d^3x |\Psi(\vec{x}, t)|^2 = 1 \quad \forall \quad t.$$

Normierung ist eine zusätzliche, physikalisch motivierte Bedingung: Das Teilchen muss zu jedem Zeitpunkt irgendwo sein. $\Rightarrow$ DGL homogen in Ψ .

4. Ebene Wellen als Lösung

$$\Psi(\vec{x}, t) = C \exp \left(i \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar} - \frac{1}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t \right) \right).$$

Betrachte

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x}, t) = -\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}^2}{2m}\Psi(\vec{x}, t) = \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x}, t).$$

$\Rightarrow$ Schrödinger-Gleichung für freies Teilchen

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x}, t).} \quad (6.10)$$

5. Da Ψ selbst keine unmittelbare Bedeutung hat, kann die Wellenfunktion mit einer Phase versehen werden, ohne dass dies physikalische Konsequenzen hat:

$$\Psi_\alpha(\vec{x}, t) := e^{i\alpha}\Psi_0(\vec{x}, t), \quad (6.11)$$

α reell, unabhängig von Ort und Zeit. $\Rightarrow$

$$\rho_\alpha = \Psi_\alpha^*\Psi_\alpha = \Psi_0^*e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\Psi_0 = \rho_0.$$

6. Explizites auftreten von $i \Rightarrow$ Lösung Ψ ist komplex: $\text{Re}(\Psi)$ und $\text{Im}(\Psi)$ sind gekoppelt. Selbst wenn Ψ zur Zeit t_0 reell präpariert ist, stellt sich danach ein komplexes Ψ ein.
7. Die Schrödinger-Gleichung für Ψ erhält man auch aus der nichtrelativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

mit der Ersetzungsregel

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.12)$$

6.2.3 Superposition monochromatischer, ebener Wellen

Es sei

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad \frac{\vec{p}^2}{2m} = E = \hbar\omega.$$

Die Wellenfunktion

$$\Psi(\vec{x}, t) = C \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \quad (6.13)$$

beschreibt genau genommen keinen physikalisch realisierbaren Zustand, da sie nicht auf eins normierbar ist:

$$\rho(\vec{x}, t) = |C|^2 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x \rho(\vec{x}, t) = \infty \text{ oder } 0.$$

Trotzdem sind monochromatische, ebene Wellen

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - E(\vec{p})t)} \quad (6.14)$$

eine praktisch nicht zu entbehrende Idealisierung, da man aus ihnen lokalisierte Wellenpakete überlagern kann:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \tilde{\Psi}(\vec{p}) \Psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t). \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3x |\Psi(\vec{x}, t)|^2 \\ &= \int d^3x \int d^3p \Psi_{\vec{p}}^*(\vec{x}, t) \tilde{\Psi}^*(\vec{p}) \int d^3q \tilde{\Psi}(\vec{q}) \Psi_{\vec{q}}(\vec{x}, t) \\ &= \int d^3p \int d^3q \int d^3x \tilde{\Psi}^*(\vec{p}) \tilde{\Psi}(\vec{q}) \Psi_{\vec{p}}^*(\vec{x}, t) \Psi_{\vec{q}}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} &\int d^3x \Psi_{\vec{p}}^*(\vec{x}, t) \Psi_{\vec{q}}(\vec{x}, t) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x \underbrace{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{x}\right)}_{(2\pi)^3 \delta\left(\frac{\vec{q} - \vec{p}}{\hbar}\right) = (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{q} - \vec{p})} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}[E(\vec{q}) - E(\vec{p})]t\right) \\ &= \delta(\vec{q} - \vec{p}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}[E(\vec{q}) - E(\vec{p})]t\right). \end{aligned}$$

Fortsetzung

$$\begin{aligned} \dots &= \int d^3p \int d^3q \tilde{\Psi}^*(\vec{p}) \tilde{\Psi}(\vec{q}) \delta(\vec{q} - \vec{p}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}[E(\vec{q}) - E(\vec{p})]t\right) \\ &= \int d^3p |\tilde{\Psi}(\vec{p})|^2. \end{aligned}$$

Umkehrung

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x \Psi(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} = \dots = \tilde{\Psi}(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} E(\vec{p})t},$$

d. h.

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}, 0) = \tilde{\Psi}(\vec{p}).$$

Insbesondere gilt

$$|\tilde{\Psi}(\vec{p}, t)|^2 = |\tilde{\Psi}(\vec{p})|^2. \quad (6.16)$$

Interpretation: $|\tilde{\Psi}(\vec{p})|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls $\vec{p}$.

6.2.4 Eindimensionale Wellenpakete

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\Psi}(p) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(px - \frac{p^2}{2m} t \right) \right]. \quad (6.17)$$

Alternative Schreibweise mit

$$p = \hbar k, \quad \frac{p^2}{2m} = \hbar \omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

liefert

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \hbar dk \tilde{\Psi}(p) e^{i[kx - \omega(k)t]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\Psi}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \end{aligned} \quad (6.18)$$

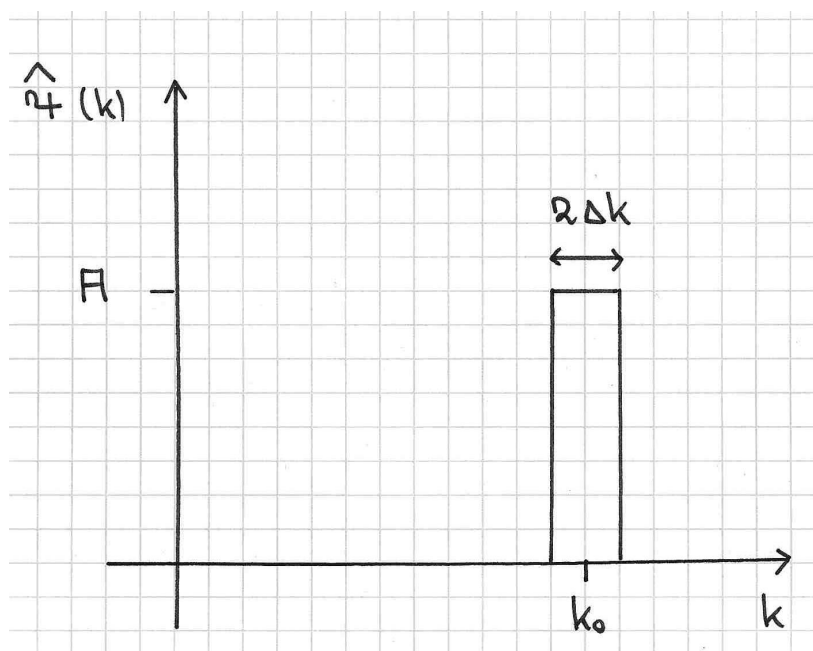
mit $\hat{\Psi}(k) = \sqrt{\hbar} \tilde{\Psi}(p)$.

Monochromatische ebene Welle

$$\tilde{\Psi}(p) = \delta(p - p_0).$$

Nicht normierbar!

Kasten



Parameter: $A > 0$, $0 < \Delta k \ll k_0$.

Normierung

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\hat{\Psi}(k)|^2 \\ &= \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk |A|^2 = 2\Delta k |A|^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\Delta k}}.$$

Entwickle $\omega(k)$ um k_0 :

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega'(k_0) + \frac{1}{2}(k - k_0)^2\omega''(k_0)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega(k_0) &= \frac{\hbar k_0^2}{2m} =: \omega_0 \\ \omega'(k_0) &= \frac{\hbar k_0}{m} =: \omega'_0, \\ \omega''(k_0) &= \frac{\hbar}{m} =: \omega''_0. \end{aligned}$$

Betrachte Argument der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
& kx - \omega(k)t \\
&= [k_0 + (k - k_0)]x - \omega_0 t - (k - k_0)\omega'_0 t - \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 t \\
&= k_0 x - \omega_0 t + (k - k_0)(x - \omega'_0 t) - \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 t.
\end{aligned}$$

Wann dürfen wir den letzten Term vernachlässigen?

Betrachte

$$(k - k_0)\omega'_0 t + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 t.$$

Vergleiche ω'_0 mit $\frac{1}{2}(k - k_0)\omega''_0$:

$$\omega'_0 \gg \left| \frac{1}{2}(k - k_0) \right| \omega''_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar k_0}{m} \gg \frac{\Delta k}{2} \frac{\hbar}{m} \quad \Rightarrow \quad k_0 \gg \frac{\Delta k}{2}.$$

Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\Psi(x, t) \approx \frac{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}} A \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk e^{i(k - k_0)(x - \omega'_0 t)}.$$

Substitution $k' = k - k_0$, $dk' = dk$:

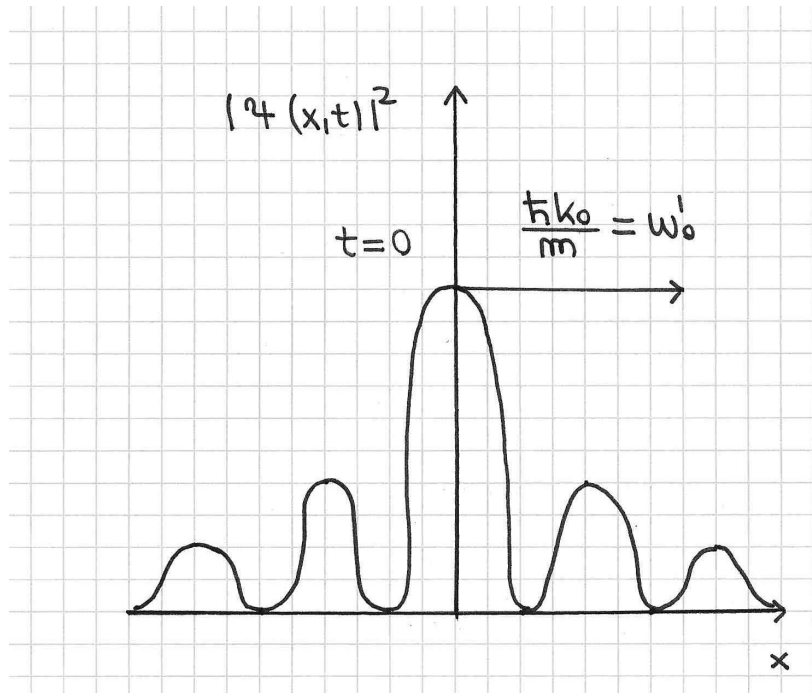
$$\begin{aligned}
\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk \dots &= \int_{-\Delta k}^{\Delta k} dk' e^{ik'(x - \omega'_0 t)} = \int_{-\Delta k}^{\Delta k} dk' \cos(k'(x - \omega'_0 t)) \\
&= 2 \int_0^{\Delta k} dk' \cos(k'(x - \omega'_0 t)) = 2 \frac{\sin(k'(x - \omega'_0 t))}{(x - \omega'_0 t)} \Big|_0^{\Delta k} \\
&= 2 \frac{\sin(\Delta k(x - \omega'_0 t))}{x - \omega'_0 t}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &\approx 2A \frac{\sin(\Delta k(x - \omega'_0 t))}{x - \omega'_0 t} \frac{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.19) \\
&= \text{Modulation der Amplitude} \times \text{ebene Welle.}
\end{aligned}$$

Diskussion von

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\sin(\Delta k(x - \omega'_0 t))}{x - \omega'_0 t} \right)^2 = \frac{\Delta k}{\pi} \left(\frac{\sin(\Delta k(x - \omega'_0 t))}{\Delta k(x - \omega'_0 t)} \right)^2.$$



Phasengeschwindigkeit $v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit des einzelnen Wellenzugs.

Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{Gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Amplitude.

Dispersion (Zerfließen des Wellenpakets) liegt vor, falls

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{\hbar}{m} \neq 0.$$

Vorsicht: Da wir $-\frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 t$ vernachlässigt haben, zerfließt das Wellenpaket nicht.

Gauß'sches Wellenpaket

$$\hat{\Psi}(k) = \hat{\Psi}_0 \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{4(\Delta k)^2}\right) \quad (6.20)$$

liefert Gauß-Verteilung für Wahrscheinlichkeitsdichte der k -Werte (siehe **Teil 2, Übung 7, Aufgabe 3**)

$$|\hat{\Psi}(k)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta k} \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right). \quad (6.21)$$

Verwende

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k - k_0)^2\omega''_0$$

für die Bestimmung der Ortsraumwellenfunktion:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \widehat{\Psi}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \\ &= \frac{e^{i(k_0x - \omega_0t)}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \times \widehat{\Psi}_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{i(k-k_0)(x-\omega'_0t) - \frac{1}{2}(k-k_0)^2 \left(\frac{1}{2(\Delta k)^2} + i\omega''_0t \right)} \\ &= \text{ebene Welle} \times \text{Modulation der Amplitude.}\end{aligned}$$

Substitution $k' = k - k_0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \dots = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(\Delta k)^2} + i\omega''_0t \right) k'^2 + i(x - \omega'_0t)k'}.$$

Betrachte das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2 + bx}.$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}-ax^2 + bx &= -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}. \\ \dots &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}}.\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}y &= x - \frac{b}{2a}, \quad dy = dx. \\ \dots &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-ay^2} = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.\end{aligned}$$

Setze

$$a = \frac{1}{4(\Delta k)^2} + \frac{i}{2}\omega''_0t, \quad b = i(x - \omega'_0t).$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{a}} &= \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4(\Delta k)^2} + \frac{i}{2}\omega_0''t}} = 2\Delta k \sqrt{\frac{\pi}{1 + 2i(\Delta k)^2\omega_0''t}}, \\ \frac{b^2}{4a} &= -\frac{(\Delta k)^2(x - \omega_0't)^2}{1 + 2i(\Delta k)^2\omega_0''t}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wellenfunktion

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{e^{i(k_0x - \omega_0t)}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \times \hat{\Psi}_0 2\Delta k \sqrt{\frac{\pi}{1 + 2i(\Delta k)^2\omega_0''t}} \exp \left[-\frac{(\Delta k)^2(x - \omega_0't)^2}{1 + 2i(\Delta k)^2\omega_0''t} \right].\end{aligned}\tag{6.22}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= |\Psi(x, t)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{|\hat{\Psi}_0|^2}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta k}} 4(\Delta k)^2 \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4(\Delta k)^4(\omega_0''t)^2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -(\Delta k)^2(x - \omega_0't)^2 \left[\frac{1}{1 - 2i(\Delta k)^2\omega_0''t} + \frac{1}{1 + 2i(\Delta k)^2\omega_0''t} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Beachte

$$\omega_0'' = \frac{\hbar}{m}$$

und definiere

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta k \hbar t}{m}\right)^2}}{2\Delta k}, \\ a(t) &= \frac{\hbar k_0 t}{m}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Gauß-Verteilung

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - a(t))^2}{\sigma^2(t)}}\tag{6.23}$$

mit den Parametern a und σ : In a liegt sowohl das Maximum als auch das Symmetriezentrum der Verteilung. σ ist der Abstand von diesem Punkt zu den Wendepunkten.

Diskussion

1. Maximum bewegt sich: $a(t)$.
2. Wellenpaket zerfließt, d. h. wird für $t > 0$ immer breiter. Dafür wird der Betrag der Amplitude immer kleiner.
3. Je „schärfer“ der Impuls festgelegt ist, desto breiter ist die Verteilung im Ortsraum.
4. Kleinste Breite für $t = 0$:

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\Delta k}.$$

$$|\Psi(x, 0)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta k e^{-2(\Delta k)^2 x^2}.$$

Verwende **Teil 2, Übung 3, Aufgabe 6**:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle|_{t=0} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta k \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-2(\Delta k)^2 x^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta k \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (2(\Delta k)^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(2\Delta k)^2}. \end{aligned}$$

$$\langle x \rangle|_{t=0} = 0.$$

$$\Delta x = \left(\langle x^2 \rangle|_{t=0} - (\langle x \rangle|_{t=0})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta k}.$$

Mit $\Delta p = \hbar \Delta k$ gilt

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Erstes Beispiel für die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

6.3 Exkurs in den Hilbert-Raum

F: Worin besteht der mathematische Rahmen zur Beschreibung der Quantenwelt?

A: Theorie des Hilbert-Raums und der linearen Operatoren.

Nach dem Superpositionsprinzip bilden die Wellenfunktionen einen linearen Raum $\mathcal{H}$.

6.3.1 Skalarprodukt, Hilbert-Raum, Orthonormalbasis, Vollständigkeit

Siehe auch Abschnitt 5.2.14.

Skalarprodukt

Es existiert ein (von t unabhängiges) Skalarprodukt

$$\langle \Psi | \varphi \rangle := \int d^3x \, \Psi^*(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}, t). \quad (6.24)$$

Wir setzen $t = 0$ und schreiben $\Psi(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}, 0)$.

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &\geq 0 \quad \text{positiv definit (Wahrscheinlichkeitsinterpretation),} \\ \langle \Psi | \Psi \rangle &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi = 0, \\ \langle \Psi | \varphi \rangle^* &= \langle \varphi | \Psi \rangle, \\ \langle \Psi | c\varphi \rangle &= c \langle \Psi | \varphi \rangle, \\ \langle c\Psi | \varphi \rangle &= c^* \langle \Psi | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Kanonische Norm

$$\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}.$$

Hilbert-Raum $\mathcal{H}$:

Betrachte Skalarproduktraum mit kanonischer Norm. Jede Cauchy-Folge in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ hat einen Grenzwert in $\mathcal{H}$.

Hier: Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\mathbb{R}^3)$.
(2 für quadratintegrierbar, L für Lebesgue-Integral).

Orthogonalität

$\Psi \neq 0$ und $\varphi \neq 0$ heißen orthogonal, falls gilt

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = 0.$$

Basis

Die Menge $\{\Psi_k\}$ bildet eine Basis, falls sich jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ eindeutig nach den Ψ_k entwickeln lässt (k (Symbol) kann diskret oder kontinuierlich sein).

Orthonormalbasis

$$\langle \Psi_{k'} | \Psi_k \rangle = \begin{cases} \delta_{k'k} & \text{für diskretes } k, \\ \delta(k' - k) & \text{für kontinuierliches } k. \end{cases}$$

Ein System von Orthonormalfunktionen $\{\Psi_k\}$ heißt vollständig, wenn es eine Basis bildet:

$$\Psi = \sum_k a_k(\Psi) \Psi_k$$

mit

$$a_k(\Psi) = \langle \Psi_k | \Psi \rangle = \sum_{k'} \langle \Psi_k a_{k'}(\Psi) | \Psi_{k'} \rangle = \sum_{k'} a_{k'}(\Psi) \langle \Psi_k | \Psi_{k'} \rangle = a_k(\Psi).$$

Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}) &= \sum_k a_k(\Psi) \Psi_k(\vec{x}) \\&= \sum_k \int d^3x' \Psi_k^*(\vec{x}') \Psi(\vec{x}') \Psi_k(\vec{x}) \\&= \int d^3x' \underbrace{\left(\sum_k \Psi_k(\vec{x}) \Psi_k^*(\vec{x}') \right)}_{\delta(\vec{x} - \vec{x}')} \Psi(\vec{x}'),\end{aligned}$$

d. h.

$$\sum_k \Psi_k(\vec{x}) \Psi_k^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Beispiele

Komplementäre Basissysteme

1. Scharfer Impuls

$$\left\{ \Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

2. Scharfer Ort

$$\left\{ \Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

3. Beachte: Die Basisfunktionen sind selbst nicht notwendigerweise quadratintegrierbar.

6.3.2 Lineare Operatoren

Motivation: Den physikalischen Größen werden hermitesche, lineare Operatoren zugeordnet (Quantenmechanisches Korrespondenzprinzip).

Linearer Operator

Eine Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt linearer Operator in $\mathcal{H}$, falls gilt:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) = \alpha_1 \mathcal{L} \Psi_1 + \alpha_2 \mathcal{L} \Psi_2 \quad \forall \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad \Psi_i \in \mathcal{H}. \quad (6.25)$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a \Psi(\vec{x}) &= a \Psi(\vec{x}), \quad a \in \mathbb{C}, \\ \mathcal{L}_{x_i} \Psi(\vec{x}) &= x_i \Psi(\vec{x}), \\ \mathcal{L}_{\nabla_i} \Psi(\vec{x}) &= \nabla_i \Psi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Die Summe und das Produkt zweier linearer Operatoren definieren weitere lineare Operatoren.

Matrixelement eines Operators

$$\underbrace{\langle \Psi | \mathcal{L} | \varphi \rangle}_* := \langle \Psi | \mathcal{L} \varphi \rangle = \int d^3x \Psi^*(\vec{x}) \mathcal{L} \varphi(\vec{x}). \quad (6.26)$$

*: Notation an spätere Dirac-Schreibweise angepasst.

Satz: Ein linearer Operator $\mathcal{L}$ ist durch die Angabe aller Matrixelemente bezüglich einer vollständigen Basis definiert.

Beweis: Gegeben sei

$$\mathcal{L}_{k'k} := \langle \Psi_{k'} | \mathcal{L} | \Psi_k \rangle$$

und $\Psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\Psi = \sum_{k'} \Psi_{k'} \langle \Psi_{k'} | \Psi \rangle.$$

Entwicklung von $\mathcal{L}\Psi$ nach Basiszuständen

$$\mathcal{L}\Psi = \sum_k \Psi_k \langle \Psi_k | \mathcal{L}\Psi \rangle.$$

Verwende

$$\langle \Psi_k | \mathcal{L} \Psi \rangle = \langle \Psi_k | \mathcal{L} \left(\sum_{k'} \langle \Psi_{k'} | \Psi \rangle \Psi_{k'} \right) = \sum_{k'} \langle \Psi_{k'} | \Psi \rangle \langle \Psi_k | \mathcal{L} \Psi_{k'} \rangle.$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L} \Psi = \sum_{k, k'} \Psi_k \langle \Psi_k | \mathcal{L} | \Psi_{k'} \rangle \langle \Psi_{k'} | \Psi \rangle.$$

Erwartungswert von $\mathcal{L}$ bezüglich Ψ

$$\langle \mathcal{L} \rangle := \langle \mathcal{L} \rangle_\Psi := \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle = \int d^3x \Psi^*(\vec{x}) \mathcal{L} \Psi(\vec{x}). \quad (6.27)$$

Adjungierter Operator

Gegeben sei $\mathcal{L}$. Der adjungierte Operator $\mathcal{L}^\dagger$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \mathcal{L} \varphi \rangle &= \langle \Psi | \mathcal{L} | \varphi \rangle =: \langle \varphi | \mathcal{L}^\dagger | \Psi \rangle^* = \langle \varphi | \mathcal{L}^\dagger \Psi \rangle^* \\ &= \langle \mathcal{L}^\dagger \Psi | \varphi \rangle \quad \forall \quad \varphi, \Psi \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Für gegebenes $\{\Psi_k\}$ gilt:

$$\mathcal{L}_{k'k}^\dagger = \mathcal{L}_{kk'}^*.$$

Beispiele:

1. $\mathcal{L}_a^\dagger = \mathcal{L}_{a^*}$, denn:

$$\langle \Psi | \mathcal{L}_a^\dagger | \varphi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{L}_a | \Psi \rangle^* = (a \langle \varphi | \Psi \rangle)^* = a^* \langle \Psi | \varphi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L}_{a^*} | \varphi \rangle.$$

2. Teil 2, Übung 9, Aufgabe 1: $\mathcal{L}_{x_i}^\dagger = \mathcal{L}_{x_i}$.

3. Teil 2, Übung 9, Aufgabe 1: $\mathcal{L}_{\nabla_i}^\dagger = -\mathcal{L}_{\nabla_i}$.

Rechenregeln

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \mathcal{L}_1 + \alpha_2 \mathcal{L}_2)^\dagger &= \alpha_1^* \mathcal{L}_1^\dagger + \alpha_2^* \mathcal{L}_2^\dagger, \\ (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2)^\dagger &= \mathcal{L}_2^\dagger \mathcal{L}_1^\dagger. \end{aligned}$$

Exemplarisch:

$$\begin{aligned} &\langle (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2)^\dagger \Psi | \varphi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) \varphi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_2 \varphi) \rangle = \langle (\mathcal{L}_1^\dagger \Psi) | \mathcal{L}_2 \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}_2^\dagger (\mathcal{L}_1^\dagger \Psi) | \varphi \rangle \\ &= \langle (\mathcal{L}_2^\dagger \mathcal{L}_1^\dagger) \Psi | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Selbstadjungierte oder hermitesche Operatoren

erfüllen

$$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}. \quad (6.29)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \mathcal{L} \varphi \rangle &= \langle \Psi | \mathcal{L} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{L}^\dagger | \Psi \rangle^* = \langle \varphi | \mathcal{L} | \Psi \rangle^* = \langle \varphi | \mathcal{L} \Psi \rangle^* \\ &= \langle \mathcal{L} \Psi | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Hermitesche Operatoren besitzen reelle Erwartungswerte:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L}^\dagger | \Psi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle^*.$$

Eigenschaften hermitescher Operatoren

Voraussetzung: $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ hermitesch.

1. $(\mathcal{L}\mathcal{M})^\dagger = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{M}\mathcal{L}.$

Insbesondere: $\mathcal{L}\mathcal{M}$ ist hermitesch, falls $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ vertauschbar sind, d. h.

$$\mathcal{L}\mathcal{M}\Psi = \mathcal{M}\mathcal{L}\Psi \quad \forall \quad \Psi \in \mathcal{H}.$$

2. $\mathcal{L}\mathcal{M} + \mathcal{M}\mathcal{L}$ und $i(\mathcal{L}\mathcal{M} - \mathcal{M}\mathcal{L})$ sind hermitesch.

Eigenfunktionen und Eigenwerte eines linearen Operators

Gegeben sei $\mathcal{L}$. Gilt für $0 \neq \Psi \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

so heißt Ψ Eigenfunktion von $\mathcal{L}$ mit Eigenwert λ .

Der Eigenwert heißt entartet, falls es mehrere linear unabhängige Ψ_i gibt mit diesem Eigenwert, d. h.

$$\mathcal{L}\Psi_i = \lambda\Psi_i.$$

$\{\lambda\}$ heißt das Spektrum des Operators $\mathcal{L}$.

Satz: Hermitesche Operatoren besitzen reelle Eigenwerte.

Beweis: Ψ sei Eigenfunktion mit $\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$.

$$\langle \mathcal{L} \rangle_\Psi = \lambda \langle \Psi | \Psi \rangle \quad \text{ist reell.}$$

Satz: Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten eines hermiteschen Operators sind orthogonal.

Beweis: Gegeben seien Ψ_1 und Ψ_2 mit $\mathcal{L}\Psi_i = \lambda_i\Psi_i$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{aligned}\langle \Psi_2 | \mathcal{L}\Psi_1 \rangle &= \lambda_1 \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = \langle \mathcal{L}\Psi_2 | \Psi_1 \rangle \stackrel{\lambda_2^* = \lambda_2}{=} \lambda_2 \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle. \\ \Rightarrow & (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = 0. \\ \Rightarrow & \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = 0, \quad \text{da } \lambda_1 \neq \lambda_2.\end{aligned}$$

Falls das System von Eigenfunktionen $\{\Psi_\lambda\}$ vollständig ist, kann man daraus eine Orthonormalbasis konstruieren. In dieser Basis nimmt $\mathcal{L}$ die besonders einfache Diagonalform an:

$$\mathcal{L}_{\lambda'\lambda} = \langle \Psi_{\lambda'} | \mathcal{L} | \Psi_\lambda \rangle = \lambda \delta_{\lambda'\lambda}.$$

Unter Umständen kontinuierliche Eigenwerte, dann $\delta(\lambda' - \lambda)$.

6.3.3 Beschreibung von Observablen durch hermitesche Operatoren

Klassische Mechanik: Messgrößen (Observable) sind durch Funktionen $f(q, p)$ von Ort und Impuls gegeben.

Beispiele:

$$\begin{aligned}H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \\ \vec{v} &= \frac{\vec{p}}{m}, \\ \vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p}.\end{aligned}$$

Quantenmechanik (QM): Den klassischen Observablen werden hermitesche, lineare Operatoren zugeordnet, so dass Messgrößen Erwartungswerte dieser Operatoren sind.

1. Ortskoordinate $\vec{x}$

$$\mathcal{L}_{x_i} = \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

mit

$$\hat{x}_i \Psi(\vec{x}) = x_i \Psi(\vec{x}). \quad (6.30)$$

Häufig: Symbol „ $\hat{}$ “ zur Kennzeichnung eines Operators.

$$\langle x_i \rangle = \int d^3x x_i \Psi^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) = \int d^3x \Psi^*(\vec{x}) \hat{x}_i \Psi(\vec{x}) = \langle \mathcal{L}_{x_i} \rangle_\Psi.$$

Eigenfunktion zu $\hat{x}$ mit Eigenwert $\vec{x}_0$:

$$\Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (6.31)$$

denn

$$\hat{x} \Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \vec{x} \Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{x}_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{x}_0 \Psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}).$$

2. Impuls $\vec{p}$

Fourier-Transformation $\Psi(\vec{x}) \rightarrow \tilde{\Psi}(\vec{p})$ mit

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \Psi(\vec{x}).$$

Mittlerer Impuls

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle &= \int d^3p \vec{p} \tilde{\Psi}^*(\vec{p}) \tilde{\Psi}(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \int d^3x \int d^3x' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \Psi^*(\vec{x}) \vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} \Psi(\vec{x}') \end{aligned}$$

p -Integration liefert Deltafunktion, es „stört“ aber $\vec{p}$, deshalb Trick:

$$\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x \int d^3x' \Psi^*(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x \underbrace{\int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \Psi(\vec{x}')}_{(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \int d^3x \Psi^*(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Impulsoperator

$$\mathcal{L}_{p_i} = \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \nabla_i = \frac{\hbar}{i} \mathcal{L}_{\nabla_i},$$

$$\hat{p}_i \Psi(\vec{x}) = \frac{\hbar}{i} \nabla_i \Psi(\vec{x}). \quad (6.32)$$

Insbesondere gilt (mit **Teil 2, Übung 9, Aufgabe 1**)

$$\mathcal{L}_{p_i}^\dagger = \mathcal{L}_{p_i}.$$

Eigenfunktionen zu $\hat{p}$ mit Eigenwert $\vec{p}_0$:

$$\Psi_{\vec{p}_0}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{x}}, \quad (6.33)$$

denn:

$$\begin{aligned} \hat{p} \Psi_{\vec{p}_0}(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{x}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \frac{\hbar}{i} \frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{x}} \\ &= \vec{p}_0 \Psi_{\vec{p}_0}(\vec{x}). \end{aligned}$$

3. Für klassische Observable $f(\vec{x}, \vec{p})$ erhält man die zugehörigen Operatoren durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \hat{\vec{x}}, \\ \vec{p} &\rightarrow \hat{\vec{p}}, \\ f(\vec{x}, \vec{p}) &\rightarrow f(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}). \end{aligned}$$

Vorsicht: Die Übersetzung ist nicht immer eindeutig und auch nicht immer hermitesch.

Stichwort: Problem der Operatorreihenfolge.

Beispiele:

(a) Hamilton-Funktion

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad \rightarrow$$

Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}).$$

(b) Drehimpuls

$$\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p} \quad \rightarrow \quad \hat{\vec{l}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}.$$

4. Kommutator und Antikommutator: $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare Operatoren.

$$\begin{aligned} \text{Kommutator:} \quad [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \\ \text{Antikommutator:} \quad \{\hat{A}, \hat{B}\} &= \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}, \\ \text{Zerlegung:} \quad \hat{A}\hat{B} &= \frac{1}{2}\{\hat{A}, \hat{B}\} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]. \end{aligned}$$

Zwei Operatoren heißen vertauschbar, wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

Beispiele:

(a) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{x}_i \hat{x}_j \Psi(\vec{x}) &= \hat{x}_i (x_j \Psi(\vec{x})) = x_j \hat{x}_i \Psi(\vec{x}) = x_j x_i \Psi(\vec{x}) \\ &= x_i x_j \Psi(\vec{x}) = x_i \hat{x}_j \Psi(\vec{x}) = \hat{x}_j (x_i \Psi(\vec{x})) \\ &= \hat{x}_j \hat{x}_i \Psi(\vec{x}). \end{aligned}$$

(b) $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$.

(c) $[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_j] \Psi(\vec{x}) &= \hat{p}_i (\hat{x}_j \Psi(\vec{x})) - \hat{x}_j (\hat{p}_i \Psi(\vec{x})) \\ &= \frac{\hbar}{i} \nabla_i (x_j \Psi(\vec{x})) - x_j \frac{\hbar}{i} \nabla_i \Psi(\vec{x}) \\ &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ij} \Psi(\vec{x}). \end{aligned}$$

5. Rechenregeln:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= -[\hat{B}, \hat{A}], \\ [\alpha_1 \hat{A}_1 + \alpha_2 \hat{A}_2, \hat{B}] &= \alpha_1 [\hat{A}_1, \hat{B}] + \alpha_2 [\hat{A}_2, \hat{B}], \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]. \end{aligned}$$

6. Satz: Vertauschbare Operatoren besitzen denselben Satz von Eigenfunktionen.

Beweis: Es sei Ψ_α Eigenfunktion von $\hat{A}$ mit Eigenwert α ,

$$\hat{A}\Psi_\alpha = \alpha\Psi_\alpha.$$

$\Rightarrow \hat{B}\Psi_\alpha$ ist auch Eigenfunktion von $\hat{A}$ mit Eigenwert α :

$$\hat{A}(\hat{B}\Psi_\alpha) = \hat{B}(\hat{A}\Psi_\alpha) = \hat{B}(\alpha\Psi_\alpha) = \alpha(\hat{B}\Psi_\alpha).$$

Ist α nicht entartet, so ist $\hat{B}\Psi_\alpha$ Vielfaches von Ψ_α und es gilt $\hat{B}\Psi_\alpha = b_\alpha\Psi_\alpha$.

6.3.4 Dirac'sche Bra- und Ket-Schreibweise

Es sei X ein n -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis $\{\chi_a\}$, $a = 1, \dots, n$. Dann ist

$$X^* := \{F : X \rightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ lineares Funktional auf } X\}$$

der zu X duale Raum. Es gilt

$$\begin{aligned} (\alpha F + \beta F)(x) &= \alpha F(x) + \beta F(x), \\ F(\alpha x + \beta y) &= \alpha F(x) + \beta F(y), \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X, F, G \in X^*, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Die duale Basis $\{\chi_a^*\}$ zu $\{\chi_a\}$ wird durch

$$\chi_a^*(\chi_b) = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, n,$$

definiert, d. h. jedem Basisvektor aus X ist ein Basisvektor aus X^* zugeordnet.

Dirac'sche Bra- und Ket-Schreibweise

- Kets $|a\rangle$ sind Basisvektoren von X .
- Die zu den Kets konjugierten Bras $\langle a|$ sind Basisvektoren des zu X dualen Raums X^* .
- $\chi_a^*(\chi_b) = \langle a|b\rangle = \delta_{ab}$.
- Beispiel: $n = 2$ (später: Beschreibung des Elektronenspins)

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_1^* = (1 \ 0), \quad \chi_2^* = (0 \ 1),$$

$$X \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^* \ni F = (f_1 \ f_2),$$

$$F(x) = (f_1 \ f_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f_1 x_1 + f_2 x_2 \in \mathbb{C}.$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} x &= x_1|1\rangle + x_2|2\rangle, \\ F &= f_1\langle 1| + f_2\langle 2|, \\ F(x) &= \langle f|x\rangle = f_1 x_1 + f_2 x_2. \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: Gegeben sei Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

1. Schreibe Elemente $\Psi \in \mathcal{H}$ als so genannte Zustands-Kets $|\Psi\rangle$.
2. Kennzeichnung der Basiszustände $|k\rangle$ durch Eigenwerte geeigneter hermitescher Operatoren, z. B.

$$\begin{aligned} \hat{p}|\vec{p}\rangle &= \vec{p}|\vec{p}\rangle, \\ \hat{x}|\vec{x}\rangle &= \vec{x}|\vec{x}\rangle. \end{aligned}$$

3. Definition des zu $\mathcal{H}$ dualen Raums $\mathcal{H}^*$:

$$\mathcal{H}^* := \{F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ lineares Funktional auf } \mathcal{H}\}.$$

Schreibe Basiselemente von $\mathcal{H}^*$ als Bra-Vektoren $\langle k'|$.

4. Übersetzung:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow |\Psi\rangle, \\ F &\rightarrow \langle\varphi|, \\ F(x) &\rightarrow \langle\varphi|\Psi\rangle \quad (\text{bracket}). \end{aligned}$$

5. Rechenregeln

(a) Adjungieren

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle^\dagger &= \langle\Psi|, \\ \langle\varphi|^\dagger &= |\varphi\rangle, \\ (\mathcal{L}|\Psi\rangle)^\dagger &= \langle\Psi|\mathcal{L}^\dagger, \\ (\langle\Psi|\mathcal{L})^\dagger &= \mathcal{L}^\dagger|\Psi\rangle. \end{aligned}$$

(b) Orthogonalität

$$\langle k' | k \rangle = \delta(k' - k).$$

(Unter Umständen auch abzählbar unendliche Basis, dann Kronecker-Delta).

Beispiele:

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle &= \delta(\vec{p}' - \vec{p}), \\ \langle \vec{x}' | \vec{x} \rangle &= \delta(\vec{x}' - \vec{x}).\end{aligned}$$

(c) Vollständigkeit

$$1 = \sum_k |k\rangle \langle k|.$$

Beispiele:

$$1 = \int d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \int d^3p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|.$$

(d) Anwendung

$$\begin{aligned}\langle \varphi | \Psi \rangle &= \langle \varphi | 1 | \Psi \rangle = \int d^3x \langle \varphi | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \Psi \rangle \\ &= \int d^3x \varphi^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}),\end{aligned}$$

d. h. Ortsraumwellenfunktion als Entwicklungskoeffizient (Ortsdarstellung)

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} | \Psi \rangle &= \Psi(\vec{x}), \\ |\Psi\rangle &= \int d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x} | \Psi \rangle.\end{aligned}$$

Analog (Impulsdarstellung)

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} | \Psi \rangle &= \tilde{\Psi}(\vec{p}), \\ |\Psi\rangle &= \int d^3p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \Psi \rangle.\end{aligned}$$

(e) Basiswechsel

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}, \\ \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle &= \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle^* = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}.\end{aligned}$$

Denn:

$$\langle \vec{x} | \Psi \rangle = \int d^3p \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \Psi \rangle = \int d^3p \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\Psi}(\vec{p}).$$

6. Darstellung von Operatoren bzgl. verschiedener Basen

(a) Matricelemente bzgl. $|\vec{x}\rangle$ (Ortsraumdarstellung)

$$\langle \vec{x} | \hat{x} | \vec{x}' \rangle = \vec{x}' \langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle = \vec{x}' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Beachte: Hermitesche Operatoren darf man gleichermaßen nach links wie nach rechts anwenden.

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} | \hat{p} | \vec{x}' \rangle &= \int d^3p \langle \vec{x} | \hat{p} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}' \rangle = \int d^3p \vec{p} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}' \rangle \\ &= \int d^3p \vec{p} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{(2\pi\hbar)^3} \\ &= \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \delta(\vec{x} - \vec{x}').\end{aligned}$$

(b) Matricelemente bzgl. $|\vec{p}\rangle$ (Impulsraumdarstellung)

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} | \hat{p} | \vec{p}' \rangle &= \vec{p}' \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \vec{p} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ \langle \vec{p} | \hat{x} | \vec{p}' \rangle &= \int d^3x \langle \vec{p} | \hat{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \vec{p}' \rangle \\ &= \int d^3x \vec{x} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}}{(2\pi\hbar)^3} \\ &= \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{p}} \delta(\vec{p} - \vec{p}').\end{aligned}$$

6.3.5 Messgrößen und Erwartungswerte, Unschärferelation

Postulat: Der Mittelwert der Messung einer physikalischen Observablen O ist durch den Erwartungswert des zugehörigen Operators $\mathcal{L}$ (Hut weggelassen, da keine Verwechslungsmöglichkeit) bzgl. Ψ gegeben:

$$\overline{O} = \langle \mathcal{L} \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle. \quad (6.34)$$

Gegeben: Vollständige ONB $\{|k\rangle\}$ und hermitescher Operator $\mathcal{L}$ mit Spektrum $\{\alpha_k\}$, d. h.

$$\mathcal{L}|k\rangle = \alpha_k|k\rangle.$$

Betrachte beliebigen orthonormierten Zustand

$$|\Psi\rangle = \sum_k |k\rangle \underbrace{\langle k | \Psi \rangle}_{c_k}.$$

$$\text{Wegen } \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad \text{gilt} \quad \sum_k |c_k|^2 = 1.$$

Erweiterte statistische Interpretation:

$$|c_k|^2 = |\langle k | \Psi \rangle|^2$$

beschreibt Wahrscheinlichkeit bzw. -sdichte den Zustand $|k\rangle$ im Zustand $|\Psi\rangle$ zu finden.

Erwartungswert von $\mathcal{L}$ im Zustand $|\Psi\rangle$:

$$\langle \mathcal{L} \rangle_{\Psi} = \sum_k c_k \langle \Psi | \mathcal{L} | k \rangle = \sum_k c_k \alpha_k \langle \Psi | k \rangle = \sum_k |c_k|^2 \alpha_k.$$

Insbesondere: $|\Psi\rangle = |k\rangle \Rightarrow \langle \mathcal{L} \rangle_k = \alpha_k$.

Definiere

$$\Delta \mathcal{L} := \mathcal{L} - \langle \mathcal{L} \rangle.$$

Streuung einer Observablen ($\mathcal{L}$ zugehöriger Operator):

$$\begin{aligned} (\Delta O)^2 &= \langle \Delta \mathcal{L}^2 \rangle = \langle (\mathcal{L} - \langle \mathcal{L} \rangle)^2 \rangle = \langle \mathcal{L}^2 - 2\mathcal{L}\langle \mathcal{L} \rangle + \langle \mathcal{L} \rangle^2 \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}^2 \rangle - \langle \mathcal{L} \rangle^2. \end{aligned}$$

Für einen Eigenzustand $|k\rangle$ gilt

$$\langle k|\Delta\mathcal{L}^2|k\rangle = \alpha_k^2 - \alpha_k^2 = 0.$$

Ein Zustand ist Eigenzustand einer Observablen, falls die Streuung verschwindet: $\mathcal{L}$ ist im Zustand $|k\rangle$ scharf messbar.

Satz: Für zwei Observable A und B gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$C = \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle i[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2. \quad (6.35)$$

Beweis: Verwende Schwarz'sche Ungleichung

$$\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle \geq |\langle\Psi|\varphi\rangle|^2.$$

$$\begin{aligned} C &= \langle\Delta\hat{A}\Psi|\Delta\hat{A}\Psi\rangle\langle\Delta\hat{B}\Psi|\Delta\hat{B}\Psi\rangle \\ &\geq |\langle\Delta\hat{A}\Psi|\Delta\hat{B}\Psi\rangle|^2 \\ &= |\langle\Psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}|\Psi\rangle|^2 \\ &= \langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle^* \\ &= \langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle\langle(\Delta\hat{A}\Delta\hat{B})^\dagger\rangle \\ &= \langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle\langle\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}\rangle. \end{aligned}$$

Verwende

$$\begin{aligned} 2\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} &= \{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} + [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}], \\ 2\Delta\hat{B}\Delta\hat{A} &= \{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} - [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$4\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle\langle\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}\rangle = \langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle^2 - \langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle^2.$$

Außerdem

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle] = [\hat{A}, \hat{B}].$$

$\Rightarrow$

$$\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle^2 = \langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2.$$

$\Rightarrow$

$$C \geq \frac{1}{4}\underbrace{\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle^2}_{\geq 0} - \frac{1}{4}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2 \geq -\frac{1}{4}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2 = \frac{1}{4}\langle i[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2.$$

Fazit: Nichtvertauschbare Observable (genauer Operatoren) sind gemeinsam nicht beliebig genau messbar, eine möglichst genaue Messung der einen wird im Allg. die Kenntnis der anderen stören.

Anwendung: Ort und Impuls

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij},$$

$$(\Delta p_i)^2 (\Delta x_i)^2 = \langle (\Delta \hat{p}_i)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{x}_i)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

oder

$$\Delta p_i \Delta x_i \geq \frac{\hbar}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Beachte, dass es sich um dieselbe Orts- und Impulskomponente handelt.

Zahlenbeispiel: Größenordnung für Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung eines Teilchens der Masse M .

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{M} \geq \frac{\hbar}{2\Delta x M}.$$

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

1. Elektron: $M = m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 10^{-30} \text{ kg}$.
Annahme: $\Delta x = 10^{-10} \text{ m}$.

$$\Delta v \geq 0,5 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. Makroskopisch: $M = 100 \text{ kg}$. $\Delta x = 10^{-3} \text{ m}$.

$$\Delta v \geq 0,5 \times 10^{-33} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.4 Zeitliche Veränderung eines Systems

Gegeben: Zustand

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}, t = 0).$$

Gesucht: Bewegungsgleichung für $\Psi(\vec{x}, t)$.

6.4.1 Schrödinger-Gleichung

Für eine Hamilton-Funktion

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

lautet die Verallgemeinerung der freien Schrödinger-Gleichung mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 6.3

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(\vec{x}) \right) \Psi(\vec{x}, t),} \quad (6.36)$$

oder „darstellungsfrei“:

$$\boxed{i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle,} \quad (6.37)$$

mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}).$$

Bemerkung: Grundsätzlich kann der Hamilton-Operator auch explizit von der Zeit abhängen.

Gl. (6.36) ergibt sich aus Gl. (6.37) durch Anwendung des Bras $\langle \vec{x} |$:

1. Linke Seite:

$$i\hbar \langle \vec{x} | \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = i\hbar \frac{\partial \langle \vec{x} | \Psi(t) \rangle}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}.$$

2. Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \sum_{i=1}^3 \hat{p}_i^2 | \Psi(t) \rangle &= \sum_{i=1}^3 \int d^3p \langle \vec{x} | \hat{p}_i^2 | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \Psi(t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \int d^3p \underbrace{p_i^2 \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle}_{\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle} \langle \vec{p} | \Psi(t) \rangle \\ &= -\hbar^2 \Delta \Psi(\vec{x}, t), \\ \langle \vec{x} | V(\hat{\vec{x}}) | \Psi(t) \rangle &= V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

6.4.2 Kontinuitätsgleichung, Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

Damit die statistische Interpretation für alle Zeiten gilt, muss die Norm zeitlich erhalten bleiben. Dafür sorgt die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte, die aus der Schrödinger-Gleichung folgt.

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2. \quad (6.38)$$

Im Folgenden: Argumente $\vec{x}$ und t weitgehend unterdrückt.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H} \Psi \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \Psi, \\ -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= (\hat{H} \Psi)^* \Rightarrow \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar} (\hat{H} \Psi)^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left[-(\hat{H} \Psi)^* \Psi + \Psi^* \hat{H} \Psi \right] \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ - \left[\left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi \right]^* \Psi + \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi \right\}. \end{aligned}$$

Annahme: Hamilton-Operator hermitesch, d. h. $V(\vec{x})$ reell.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{i\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} [(\Delta \Psi)^* \Psi - \Psi^* \Delta \Psi] \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \cdot (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}, t) := \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) - (\vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t)) \Psi(\vec{x}, t) \right]. \quad (6.39)$$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0. \quad (6.40)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Erhaltung der Norm, d. h. der Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int d^3x \rho(\vec{x}, t) &= \int d^3x \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ &= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0\end{aligned}$$

mit dem Satz von Gauß, falls $\Psi(\vec{x}, t)$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ genügend schnell abfällt (für quadratintegrierbare Funktionen gewährleistet).

$\rho(\vec{x}, t)$ und $\vec{j}(\vec{x}, t)$ sind Erwartungswerte der Dichte- und Stromdichteoperatoren (**Teil 2, Übung 10, Aufgabe 3**)

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\vec{x}) &= \delta(\vec{x} - \hat{\vec{x}}), \\ \hat{j}(\vec{x}) &= \frac{1}{2m} \{ \hat{\vec{p}}, \hat{\rho}(\vec{x}) \}.\end{aligned}$$

Exemplarisch

$$\begin{aligned}\langle \Psi(t) | \hat{\rho}(\vec{x}) | \Psi(t) \rangle &= \int d^3x' \langle \Psi(t) | \hat{\rho}(\vec{x}) | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \Psi(t) \rangle \\ &= \int d^3x' \langle \Psi(t) | \delta(\vec{x} - \hat{\vec{x}}) | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \Psi(t) \rangle \\ &= \int d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') \langle \Psi(t) | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \Psi(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(t) | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \Psi(t) \rangle \\ &= |\Psi(\vec{x}, t)|^2.\end{aligned}$$

6.4.3 Zeitliche Änderung von Observablen

Es sei $\mathcal{L}$ der zu einer Observablen gehörige hermitesche Operator.

F: Welcher Operator beschreibt die zeitliche Änderung der Observablen?

Messgrößen entsprechen Erwartungswerten. Definiere $\dot{\mathcal{L}}$ so, dass die Erwartungswerte von $\dot{\mathcal{L}}$ gleich der zeitlichen Änderung der Erwartungswerte von $\mathcal{L}$ sind.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\mathcal{L}(t)|\Psi(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\int d^3x \Psi^*(\vec{x},t)\mathcal{L}(t)\Psi(\vec{x},t) \\ &= \int d^3x \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\mathcal{L}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\Psi + \Psi^*\mathcal{L}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi, \quad \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\Psi)^*.$$

$$\dots = \int d^3x \left(\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\Psi)^*\mathcal{L}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\Psi - \Psi^*\mathcal{L}\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi \right).$$

$\hat{H}$ hermitesch: $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$.

$$\begin{aligned}\dots &= \int d^3x \left(\frac{i}{\hbar}\Psi^*\hat{H}\mathcal{L}\Psi - \Psi^*\mathcal{L}\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\Psi \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{i}{\hbar}\Psi^*(\hat{H}\mathcal{L} - \mathcal{L}\hat{H})\Psi + \Psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\Psi \right) \\ &= \int d^3x \Psi^* \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}] \right) \Psi \\ &= \langle\Psi(t)| \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}] \right) |\Psi(t)\rangle \\ &=: \langle\Psi(t)|\dot{\mathcal{L}}|\Psi(t)\rangle.\end{aligned}$$

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für Operatoren

$$\dot{\mathcal{L}} := \frac{d}{dt}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}] \quad (6.41)$$

mit

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{L}\rangle := \left\langle \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right\rangle = \langle\dot{\mathcal{L}}\rangle.$$

Enthält $\mathcal{L}$ nicht explizit die Zeit, gilt

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}].$$

Kommutiert $\mathcal{L}$ zusätzlich mit $\hat{H}$, so heißt $\mathcal{L}$ eine Konstante der Bewegung:

$$\dot{\mathcal{L}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{L}\rangle = \text{konst.} \quad \forall t.$$

Beispiele (Teil 2, Übung 10, Aufgabe 4): Es sei

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}).$$

1. Zeitliche Änderung des Ortsoperators

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_j = \frac{\hat{p}_j}{m}.$$

2. Zeitliche Änderung des Impulsoperators

$$\frac{d}{dt}\hat{p}_j = -\nabla_j V(\hat{\vec{x}}).$$

Die entsprechenden Beziehungen für die Erwartungswerte heißen Ehrenfest'sche Sätze:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\hat{x}_j\rangle &= \left\langle\frac{\hat{p}_j}{m}\right\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{p}_j\rangle &= \langle-\nabla_j V(\hat{\vec{x}})\rangle.\end{aligned}$$

Bemerkung: Vergleich mit der klassischen Mechanik (siehe Abschnitt 2.6.3)

Klassische Mechanik	QM
$f(q, p, t)$	$\mathcal{L}$
$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$	$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}]$

d. h.

Poisson-Klammer $\{H, f\} \rightarrow$ Kommutator $\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathcal{L}]$.

6.4.4 Stationäre Zustände

Annahme: $\hat{H}$ hänge nicht explizit von t ab, d. h.

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{H}} = 0.$$

Gesucht: Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t). \quad (6.42)$$

Separationsansatz

$$\Psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) f(t).$$

Einsetzen in Schrödinger-Gleichung und Division durch Ψ liefert

$$\frac{i\hbar}{f} \frac{df}{dt} = \underbrace{E}_{\text{Separationskonstante}} = \frac{\hat{H}\varphi}{\varphi}.$$

Lösung für f :

$$f(t) = a e^{-\frac{i}{\hbar} E t}.$$

Welche Werte von E sind erlaubt?

Eigenwertgleichung (zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung)

$$\hat{H}\varphi = E\varphi \quad \text{mit} \quad \hat{H}^\dagger = \hat{H}. \quad (6.43)$$

$\Rightarrow E$ reeller Eigenwert von $\hat{H}$ (Energieeigenwert).

So genannte stationäre Lösungen für Gl. (6.42)

$$\Psi_n(\vec{x}, t) = \varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \quad (6.44)$$

Eigenschaften

1. Frequenz der Zeitperiode

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

2. In einem stationären Zustand ist die Wahrscheinlichkeitsdichte zeitunabhängig:

$$\rho_n(\vec{x}, t) = \varphi_n^*(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} = |\varphi_n(\vec{x})|^2.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho_n(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

Kontinuitätsgleichung $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = 0.$$

3. In einem stationären Zustand ist der Erwartungswert einer zeitunabhängigen Observablen konstant:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \rangle_n = \left\langle \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \mathcal{L}] \right\rangle_n = \frac{i}{\hbar} \left(\langle \hat{H} \mathcal{L} \rangle_n - \langle \mathcal{L} \hat{H} \rangle_n \right) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \hat{H} \rangle_n &= \langle n | \mathcal{L} \hat{H} | n \rangle = E_n \langle n | \mathcal{L} | n \rangle = E_n \langle \mathcal{L} \rangle_n, \\ \langle \hat{H} \mathcal{L} \rangle_n &= \langle n | \hat{H} \mathcal{L} | n \rangle = \langle n | \hat{H}^\dagger \mathcal{L} | n \rangle = E_n \langle n | \mathcal{L} | n \rangle = E_n \langle \mathcal{L} \rangle_n. \end{aligned}$$

4. Die allgemeine Lösung ist in stationäre Zustände entwickelbar:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t}.$$

c_n bestimmt man aus den Anfangsbedingungen, z. B. $t = 0$:

$$c_n = \langle \varphi_n | \Psi(t = 0) \rangle.$$

6.4.5 Eindimensionale Probleme

Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t). \quad (6.45)$$

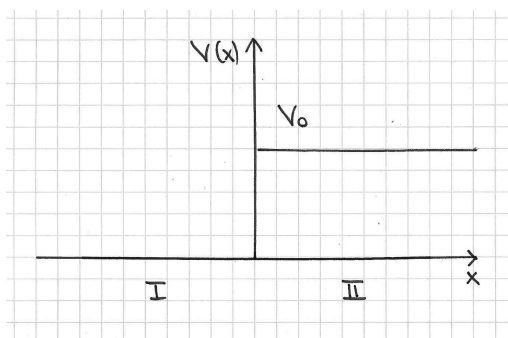
Separationsansatz liefert

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \varphi(x)$$

mit der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (6.46)$$

Potenzialstufe



Es sei $V_0 > 0$.

Fallunterscheidung

1. $E > V_0$:

$$(I) \quad \varphi'' = -k^2\varphi \quad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

$$(II) \quad \varphi'' = -q^2\varphi \quad \text{mit} \quad q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

Schwingungsgleichungen mit Fundamentallösungen

$$e^{iKx}, \quad e^{-iKx}, \quad K = \begin{cases} k & \text{in (I),} \\ q & \text{in (II).} \end{cases}$$

Beispiel: Einlaufende Welle von links, nach rechts existiert nur auslaufende Welle.

$$(I) \quad \varphi(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx},$$

$$(II) \quad \varphi(x) = Te^{iqx}.$$

Stetigkeitsbedingungen für φ und φ' bei $x = 0$:

$$1 + R = T, \quad (a)$$

$$ik(1 - R) = iqT. \quad (b)$$

$q \times (a) = -i \times (b)$ liefert

$$q(1+R) = k(1-R) \Leftrightarrow R(q+k) = k-q \Leftrightarrow R = \frac{k-q}{k+q}.$$

$$T = 1 + R = 1 + \frac{k-q}{k+q} = \frac{2k}{k+q}.$$

Diskussion

(a) Wahrscheinlichkeitsdichte (zeitunabhängig, da stationäre Lösung):

(I)

$$\begin{aligned} \rho &= |e^{ikx} (1 + Re^{-2ikx})|^2 \\ &= (1 + Re^{2ikx}) (1 + Re^{-2ikx}) \\ &= 1 + R(e^{-2ikx} + e^{2ikx}) + R^2 \\ &= 1 + R^2 + 2R \cos(2kx). \end{aligned}$$

(II)

$$\rho = T^2 = (1 + R)^2.$$

(b) Wahrscheinlichkeitsstromdichte:

$$j = \frac{\hbar}{2im}(\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi).$$

(I)

$$\begin{aligned} j &= \frac{\hbar}{2im} [(e^{-ikx} + Re^{ikx}) ik (e^{ikx} - Re^{-ikx}) \\ &\quad - (-ik) (e^{-ikx} - Re^{ikx}) (e^{ikx} + Re^{-ikx})] \\ &= \frac{\hbar k}{2m} [(e^{-ikx} + Re^{ikx}) (e^{ikx} - Re^{-ikx}) \\ &\quad + (e^{-ikx} - Re^{ikx}) (e^{ikx} + Re^{-ikx})] \\ &= \frac{\hbar k}{2m} (1 - Re^{-2ikx} + Re^{2ikx} - R^2 \\ &\quad + 1 + Re^{-2ikx} - Re^{2ikx} - R^2) \\ &= \frac{\hbar k}{m} (1 - R^2) \\ &=: j_{\text{ein}} - j_{\text{refl}}, \end{aligned}$$

mit dem einfallenden Strom j_{ein} und dem reflektierten Strom j_{refl} .

(II)

$$j = \frac{\hbar q}{m} T^2 =: j_{\text{trans}},$$

mit dem transmittierten Strom j_{trans} .

(c) Reflexionskoeffizient

$$r := \frac{\text{reflektierter Strom}}{\text{einfallender Strom}} = R^2 = \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2.$$

(d) Transmissionskoeffizient

$$t := \frac{\text{transmittierter Strom}}{\text{einfallender Strom}} = \frac{q}{k} T^2 = \frac{4qk}{(k + q)^2}.$$

(e) $E \rightarrow \infty$ ($E \gg V_0$): $T \rightarrow 1$, $R \rightarrow 0$.

(f) Teilchenzahlerhaltung

$$\begin{aligned} r + t &= 1, \\ j_I &= j_{II}, \\ j_{\text{ein}} &= j_{\text{refl}} + j_{\text{trans}}. \end{aligned}$$

Folge der Kontinuitätsgleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_0 + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \text{konst.}$$

2. $E < V_0$:

(I) Schrödinger-Gleichung unverändert.

(II):

$$\varphi'' = \kappa^2 \varphi \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Lösungen: $e^{\pm \kappa x}$.

Betrachte $x \rightarrow \infty$: (+)-Lösung scheidet aus.

Alte Stetigkeitsbetrachtungen können mit der Ersetzung $q \rightarrow i\kappa$ übernommen werden. $\Rightarrow$

$$R = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa}, \quad T = \frac{2k}{k + i\kappa}.$$

$\Rightarrow$

$$(I) \quad \varphi(x) = e^{ikx} + \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} e^{-ikx},$$

$$(II) \quad \varphi(x) = \frac{2k}{k + i\kappa} e^{-\kappa x}.$$

(a) Wahrscheinlichkeitsdichte:

(I)

$$\begin{aligned} \rho &= \left| e^{ikx} + \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} e^{-ikx} \right|^2 \\ &= \dots \\ &= 2 + \frac{2}{k^2 + \kappa^2} [(k^2 - \kappa^2) \cos(2kx) - 2k\kappa \sin(2kx)]. \end{aligned}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 2 + \frac{2}{k^2 + \kappa^2} (k^2 - \kappa^2) \\ &= \frac{2}{k^2 + \kappa^2} (k^2 + \kappa^2 + k^2 - \kappa^2) \\ &= \frac{4k^2}{k^2 + \kappa^2}. \end{aligned}$$

(II)

$$\rho(x) = \frac{4k^2}{k^2 + \kappa^2} e^{-2\kappa x},$$

mit

$$\rho(0) = \frac{4k^2}{k^2 + \kappa^2}.$$

Eindringtiefe

$$\frac{|\Psi(x)|}{|\Psi(0)|} \stackrel{!}{=} \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\kappa}.$$

(b) Wahrscheinlichkeitsstromdichten:

$$j_I = \frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2) = j_{\text{ein}} - j_{\text{refl}} = 0 = j_{II} = j_{\text{trans}}.$$

(c) Grenzfall $V_0 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\kappa &\rightarrow \infty, \\ T &= 0, \\ R &= -1, \\ \varphi(x) &= \begin{cases} e^{ikx} - e^{-ikx} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Randbedingung an einer unendlich hohen Schwelle:

$$\varphi|_{\text{Schwelle}} = 0.$$

Unendlich hohes Kastenpotenzial

Siehe **Teil 2, Übung 10, Aufgabe 6**

Harmonischer Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{C}{2} \hat{x}^2. \quad (6.47)$$

$\Rightarrow$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{C}{2} x^2 - E \right) \varphi(x) = 0.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{Cm}{\hbar^2} x^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \varphi(x) = 0.$$

Setze

$$\omega := \sqrt{\frac{C}{m}},$$

$$\alpha := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},$$

$$\xi := \alpha x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \alpha \frac{d}{d\xi},$$

$$\phi(\xi) := \varphi(x).$$

$\Rightarrow$

$$\left(\alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - \alpha^2 \xi^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \phi(\xi) = 0.$$

Setze

$$\epsilon := \frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2} = \frac{2E}{\hbar \omega}. \quad (6.48)$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \epsilon \right) \phi(\xi) = 0. \quad (6.49)$$

Skizze des Standardlösungsverfahrens (siehe Abschnitt 5.2.15):

1. Untersuche asymptotisches Verhalten der DGL für $\xi \rightarrow \pm\infty$:

$$\Rightarrow \phi \sim e^{\pm \frac{1}{2}\xi^2}.$$

(+)-Lösung scheidet wegen Nichtnormierbarkeit aus.

2. Ansatz

$$\phi(\xi) = H(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad \text{mit} \quad H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j.$$

3. Einsetzen in DGL liefert Rekursionsformel:

$$a_{j+2} = \frac{2j - (\epsilon - 1)}{(j+1)(j+2)} a_j.$$

4. Normierbare Lösung erfordert Abbruch der Reihe, d. h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$2n = \epsilon - 1.$$

Physikalische Forderung nach Normierbarkeit (Wahrscheinlichkeitsinterpretation) resultiert in Quantisierung der Energie (diskrete Energieeigenwerte):

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zugehörige stationäre Lösung:

$$\varphi_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2} H_n(\alpha x). \quad (6.50)$$

Normierungskonstante: $N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$

Hermite-Polynom: $H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

5. Bemerkungen

- (a) Klassisch: Niedrigste Energie $E_{\min} = 0$.
QM: Nullpunktsenergie $\hbar\omega/2$.
- (b) Energieniveaus sind äquidistant.

Dirac'sche Operatormethode

Lösung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators mit Hilfe einer algebraischen Methode, die im Wesentlichen auf Vertauschungsrelationen basiert.

Dirac (The Principles of Quantum Mechanics, 1930)

This example is of importance for general theory, because it forms the corner stone in the theory of radiation.

Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{\alpha^2 \hbar^2} + \alpha^2 \hat{x}^2 \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \\ [\hat{p}, \hat{x}] &= \frac{\hbar}{i}. \end{aligned}$$

Definiere dimensionslose Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{x} + \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right), \\ \hat{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{x} - \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right). \end{aligned}$$

Teil 2, Übung 11, Aufgabe 2:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger \hat{b} &= \frac{1}{2} \left(\alpha \hat{x} - \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right) \left(\alpha \hat{x} + \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{\hbar^2 \alpha^2} + \underbrace{\frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}]}_{-1} \right).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{H} = \hbar \omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.51)$$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}|\varphi\rangle = \hbar \omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) |\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

umgeschrieben zu

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} |\varphi\rangle = \left(\frac{E}{\hbar \omega} - \frac{1}{2} \right) |\varphi\rangle.$$

Wir definieren den Anzahl- oder Besetzungszahloperator

$$\hat{N} = \hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{N}^\dagger \quad (6.52)$$

und suchen Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle.$$

Für die Energieeigenwerte gilt dann

$$E_\lambda = \hbar \omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \right).$$

Eigenschaften:

1. $\lambda \geq 0$, denn

$$\lambda = \langle \lambda | \underbrace{\hat{b}^\dagger \hat{b}}_{|\psi\rangle} | \lambda \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \geq 0.$$

2. $\lambda = 0 \Leftrightarrow \hat{b}|0\rangle = 0$.

3. $[\hat{N}, \hat{b}] = -\hat{b}$ und $[\hat{N}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}^\dagger$, denn:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{b}] &= [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{b}] = \hat{b}^\dagger \underbrace{[\hat{b}, \hat{b}]}_0 + \underbrace{[\hat{b}^\dagger, \hat{b}]}_{-1} \hat{b} = -\hat{b}, \\ [\hat{N}, \hat{b}^\dagger] &= [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}^\dagger \underbrace{[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]}_1 + \underbrace{[\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger]}_0 \hat{b} = \hat{b}^\dagger. \end{aligned}$$

4. Konsequenz:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{b}|\lambda\rangle \\ \hat{b}^\dagger|\lambda\rangle \end{array} \right\} \text{ ist Eigenzustand zu } \hat{N} \text{ mit Eigenwert } \begin{cases} \lambda - 1, \\ \lambda + 1. \end{cases}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{b}|\lambda\rangle &= ([\hat{N}, \hat{b}] + \hat{b}\hat{N})|\lambda\rangle = (-\hat{b} + \hat{b}\lambda)|\lambda\rangle \\ &= (\lambda - 1)\hat{b}|\lambda\rangle, \\ \hat{N}\hat{b}^\dagger|\lambda\rangle &= ([\hat{N}, \hat{b}^\dagger] + \hat{b}^\dagger\hat{N})|\lambda\rangle = (\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\lambda)|\lambda\rangle \\ &= (\lambda + 1)\hat{b}^\dagger|\lambda\rangle. \end{aligned}$$

Zusammen mit 1. und 2. : Eigenwerte von $\hat{N}$ sind aus $\mathbb{N}_0$.
Deshalb Schreibweise $\lambda \rightarrow n$.

5. $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ heißen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren oder Ab- und Aufsteigeoperatoren. Sie erniedrigen und erhöhen die Energie um eine Energieeinheit $\hbar\omega$.

6. $n = 0$ ist der kleinste Eigenwert von $\hat{N}$ mit Eigenzustand $|0\rangle$. Es gilt

$$\hat{b}|0\rangle = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\langle x|\hat{b}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|\frac{i}{\alpha\hbar}\hat{p} + \alpha\hat{x}|0\rangle = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle x|\hat{p}|0\rangle} &= -\alpha^2\langle x|\hat{x}|0\rangle = -\alpha^2x\langle x|0\rangle = -\alpha^2x\varphi_0(x). \\ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\varphi_0(x) & \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ DGL

$$\varphi_0'(x) = -\alpha^2 x \varphi_0(x).$$

Normierte Lösung:

$$\varphi_0(x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}, \quad N_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}. \quad (6.53)$$

7. Sukzessive Konstruktion höherer Energieanregungen ausgehend vom Grundzustand (Zustand niedrigster Energie)

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger |n\rangle &= c_n^{(+)} |n+1\rangle, \\ \hat{b} |n\rangle &= c_n^{(-)} |n-1\rangle. \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} |c_n^{(+)}|^2 &= |c_n^{(+)}|^2 \langle n+1 | n+1 \rangle \\ &= \langle n | \hat{b} \hat{b}^\dagger | n \rangle \\ &= \langle n | \underbrace{[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]}_1 + \underbrace{\hat{b}^\dagger \hat{b}}_{\hat{N}} | n \rangle \\ &= (n+1) \langle n | n \rangle \\ &= (n+1). \end{aligned}$$

Wir benutzen die Phasenkonvention

$$\hat{b}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad n \geq 0. \quad (6.54)$$

Analog

$$\hat{b} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad n > 1. \quad (6.55)$$

Außerdem

$$\hat{b} |0\rangle = 0. \quad (6.56)$$

Aus Gl. (6.54) folgt

$$|n\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.57)$$

Besetzungszahl- oder Fock-Darstellung.

8. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} |n_x, n_y, n_z\rangle, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}_0, \\ E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad n = n_x + n_y + n_z. \end{aligned}$$

6.5 Drehimpuls und Spin

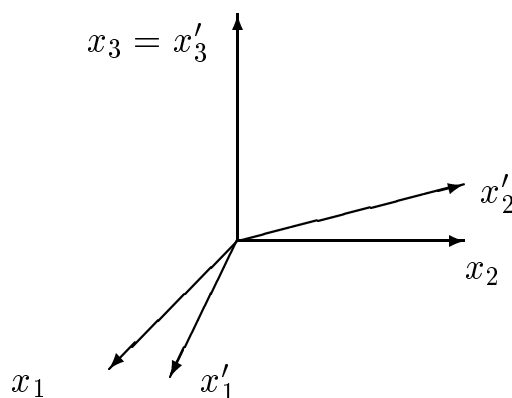
6.5.1 Drehimpulsoperatoren als Erzeugende von Drehungen

Betrachte zwei Koordinatensysteme KS und KS', die relativ zu einander um den gemeinsamen Ursprung gedreht sind.

Abschnitt 3.1:

$$x'_i = D_{ij}x_j \quad \text{mit} \quad D^T D = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \det(D) = 1.$$

Z. B.: KS' relativ zu KS um gemeinsame 3-Achse gedreht:



Infinitesimal:

$$D_3(\epsilon) = \mathbb{1} - \epsilon \mathcal{T}_3, \quad \mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Explizit:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \epsilon x_2, \\ x'_2 &= x_2 - \epsilon x_1, \\ x'_3 &= x_3, \end{aligned}$$

mit der Umkehrung

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - \epsilon x'_2, \\ x_2 &= x'_2 + \epsilon x'_1, \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned}$$

- Vorgabe: Wellenfunktion $\Psi(x_1, x_2, x_3, t)$ in KS.
- Gesucht: Wellenfunktion $\Psi'(x'_1, x'_2, x'_3, t)$ in KS'.
- Fragestellung: Wie erhält der Beobachter in KS' seine Wellenfunktion aus der Kenntnis der Wellenfunktion des Beobachters in KS?
- Gesucht: Linearer Operator $\hat{U}$, der den Zusammenhang herstellt.
- Forderung:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, t) = \Psi'(x'_1, x'_2, x'_3, t).$$

(Im Prinzip ist auch noch ein von der Drehmatrix abhängiger Phasenfaktor denkbar.)

Wechsel zu Notation x, y, z .

$$\begin{aligned} \Psi'(x', y', z', t) &= \hat{U} \Psi(x', y', z', t) = \Psi(x, y, z, t) \\ &= \Psi(x' - \epsilon y', y' + \epsilon x', z', t) \\ &= \Psi(x', y', z', t) + \underbrace{\epsilon(-y' \nabla_{x'} + x' \nabla_{y'})}_{\epsilon \frac{i}{\hbar} \hat{l}_{z'}} \Psi(x', y', z', t) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{l}_{z'}\right) \Psi(x', y', z', t). \end{aligned}$$

Umbenennung gestrichene in ungestrichene Größen + Übergang von infinitesimaler Drehung zu endlicher Drehung:

$$\hat{U}_3(\varphi) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \varphi \hat{l}_3\right).$$

Analog für Drehungen um die x - und y -Achse.

Die unitären Operatoren $\hat{U}$ bilden eine Darstellung der Drehgruppe $SO(3)$ auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der quadratintegrierbaren Funktionen.

Die hermiteschen Bahndrehimpulsoperatoren bilden (bis auf einen Faktor) eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra $so(3)$

auf $\mathcal{H}$.

Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &\rightarrow -\frac{i}{\hbar}\hat{l}_i, \\ [\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = \epsilon_{ijk}\mathcal{T}_k &\rightarrow \left[-\frac{i}{\hbar}\hat{l}_i, -\frac{i}{\hbar}\hat{l}_j\right] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2}i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{l}_k \\ &= \epsilon_{ijk}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{l}_k\right),\end{aligned}$$

d. h. Struktur der Vertauschungsrelationen bleibt erhalten.

$$B = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathcal{T}_i = \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathcal{T}} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \hat{l}_i = -\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{\hat{l}}.$$

Übergang von Lie-Algebra zu Lie-Gruppe mit Hilfe der Exponentialfunktion:

$$D = \exp(-B) = \exp(-\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathcal{T}}) \rightarrow \hat{U}(\vec{\varphi}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{\hat{l}}\right). \quad (6.58)$$

Bemerkungen:

1. Wir sind von einer Drehung des Koordinatensystems ausgegangen („passive Drehung“). Man kann auch danach fragen, wie der gedrehte Zustand aussieht (d. h. Drehung der Versuchsanordnung).

Beispiel: Apparatur sei um φ bzgl. der 3-Achse gedreht $\Rightarrow$

$$\Psi'(\vec{x}, t) = \hat{U}_3(-\varphi)\Psi(\vec{x}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\hat{l}_3\right)\Psi(\vec{x}, t),$$

d. h. im Vergleich zur passiven Drehung muss man den inversen Operator verwenden.

2. Translationen werden analog behandelt: KS' um $\vec{a}$ relativ zu KS verschoben, d. h. $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$.

$$\begin{aligned}\Psi'(\vec{x}', t) &=: \hat{T}(\vec{a})\Psi(\vec{x}', t) \stackrel{!}{=} \Psi(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}' + \vec{a}, t) \\ &= \exp\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}'\right)\Psi(\vec{x}', t),\end{aligned}$$

d. h.

$$\hat{T}(\vec{a}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \hat{\vec{p}}\right). \quad (6.59)$$

Aktive Transformation:

$$\begin{aligned} \Psi'(\vec{x}, t) &= \hat{T}(-\vec{a})\Psi(\vec{x}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \hat{\vec{p}}\right)\Psi(\vec{x}, t) \\ &= \Psi(\vec{x} - \vec{a}, t). \end{aligned}$$

6.5.2 Bahndrehimpulseigenzustände

Betrachte die Drehimpulsoperatoren

$$\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$$

mit den Vertauschungsrelationen (siehe [Teil 2, Übung 9, Aufgabe 4](#)):

$$\begin{aligned} [\hat{l}_i, \hat{l}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{l}_k, \\ [\hat{l}^2, \hat{l}_j] &= 0, \\ [\hat{x}_i, \hat{l}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{x}_k, \\ [\hat{p}_i, \hat{l}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k. \end{aligned}$$

Drehimpulsoperatoren in Kugelkoordinaten

Wir verwenden sphärische Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z &= r \cos(\theta), \end{aligned}$$

und drücken $\hat{l}_i$ und $\hat{l}^2$ als Differentialoperatoren in den Winkelvariablen θ und ϕ aus.

Behauptung:

$$\hat{l}_1 = -\frac{\hbar}{i} \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.60)$$

$$\hat{l}_2 = \frac{\hbar}{i} \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.61)$$

$$\hat{l}_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.62)$$

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (6.63)$$

Begründung:

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -r \sin(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial x} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{l}_3 = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

2. Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} \hat{l}_1 &= \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\hbar}{i} z \frac{\partial}{\partial y} = -\hat{l}_1 + \frac{\hbar}{i} y \frac{\partial}{\partial z}, \\ \hat{l}_2 &= \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\hbar}{i} z \frac{\partial}{\partial x} = \hat{l}_2 + \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\hbar}{i} \left(r \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\hbar}{i} \left(\cos(\phi) z \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\phi) z \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \cos(\phi) \hat{l}_2 - \sin(\phi) \hat{l}_1 \\
&\quad + \frac{\hbar}{i} \underbrace{[x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - r \sin(\theta)]}_{r \sin(\theta) \cos^2(\phi) + r \sin(\theta) \sin^2(\phi) - r \sin(\theta) = 0} \frac{\partial}{\partial z} \\
&= -\sin(\phi) \hat{l}_1 + \cos(\phi) \hat{l}_2.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \left(r \sin(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\hbar}{i} \left(r \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial y} - r \cos(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\hbar}{i} \left(\cos(\phi) z \frac{\partial}{\partial y} - \sin(\phi) z \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= -\cos(\phi) \hat{l}_1 + \frac{\hbar}{i} \cos(\phi) y \frac{\partial}{\partial z} \\
&\quad - \sin(\phi) \hat{l}_2 - \frac{\hbar}{i} \sin(\phi) x \frac{\partial}{\partial z} \\
&= -\cos(\phi) \hat{l}_1 - \sin(\phi) \hat{l}_2 \\
&\quad + \frac{\hbar}{i} [\cos(\phi) r \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\phi) r \sin(\theta) \cos(\phi)] \frac{\partial}{\partial z} \\
&= -\cos(\phi) \hat{l}_1 - \sin(\phi) \hat{l}_2.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

5. $-\sin(\phi)$ Gl. (6.64) $-\cos(\phi)$ Gl. (6.65) $\Rightarrow$

$$\hat{l}_1 = -\frac{\hbar}{i} \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

6. $\cos(\phi)$ Gl. (6.64) – $\sin(\phi)$ Gl. (6.65) $\Rightarrow$

$$\hat{l}_2 = \frac{\hbar}{i} \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hbar}{i} \cot(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

7. Definition der Leiteroperatoren

$$\hat{l}_{\pm} := \hat{l}_1 \pm i\hat{l}_2 = \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (6.66)$$

Denn

$$\begin{aligned} \hat{l}_1 \pm i\hat{l}_2 &= -\frac{\hbar}{i} \left[\sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &\quad \pm i \frac{\hbar}{i} \left[\cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \hbar [\cos(\phi) \pm i \sin(\phi)] \left[\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\hat{l}^2 &= \hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + \hat{l}_3^2 \\
&= \frac{1}{2} \left((\hat{l}_1 + i\hat{l}_2)(\hat{l}_1 - i\hat{l}_2) + (\hat{l}_1 - i\hat{l}_2)(\hat{l}_1 + i\hat{l}_2) \right) + \hat{l}_3^2 \\
&= \frac{1}{2}(\hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_-\hat{l}_+) + \hat{l}_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\hbar^2 \left[e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right] \\
&\quad - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{2}\hbar^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot(\theta) + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta) + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right] \\
&\quad - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{2}\hbar^2 \left[-2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\cot^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \\
&= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right].
\end{aligned}$$

Eigenfunktionen und Eigenwerte zu $\hat{l}_3$

Eigenwertgleichung für $\hat{l}_3$:

$$\hat{l}_3\Psi = \mu\Psi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Psi(r, \theta, \phi) = \mu\Psi(r, \theta, \phi).$$

Separationsansatz

$$\Psi(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\phi}h(\phi) = \mu h(\phi).$$

$\Rightarrow$

$$h(\phi) = ae^{\frac{i}{\hbar}\mu\phi}.$$

Eindeutigkeit der Wellenfunktion:

$$h(0) = h(2\pi) \quad \Rightarrow \quad \mu = \hbar m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Im Intervall $[0, 2\pi]$ lauten die auf eins normierten Lösungen

$$h_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (6.67)$$

Eigenfunktionen und Eigenwerte zu $\hat{l}^2$

Eigenwertgleichung für $\hat{l}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 \Psi &= \lambda \Psi \quad \Leftrightarrow \\ -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Psi(r, \theta, \phi) &= \lambda \Psi(r, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Separationsansatz

$$\Psi(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi).$$

Einsetzen in DGL und Division durch $\Psi \Rightarrow$

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{g(\theta)} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) g(\theta) + \frac{1}{h(\phi)} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} h(\phi) \right] = \lambda.$$

Beachte: Partielle Ableitungen können jetzt durch gewöhnliche Ableitungen ersetzt werden.

Division durch $-\hbar^2$ liefert

$$\frac{1}{\sin^2(\theta)h(\phi)} \frac{d^2 h(\phi)}{d\phi^2} + \frac{1}{g(\theta)} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right] + \frac{\lambda}{\hbar^2} g(\theta) \right] = 0.$$

Ersetze $h(\phi)$ durch $h_m(\phi)$ (vollständiges Funktionensystem) $\Rightarrow$

$$-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)} + \dots = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right] + \left[\frac{\lambda}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] g(\theta) = 0.$$

Substitution

$$\begin{aligned} z &:= \cos(\theta), \\ G(z) &:= g(\theta), \\ dz &= -\sin(\theta)d\theta, \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} &= -\frac{d}{dz}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dG(z)}{dz} \right] + \left[\frac{\lambda}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1-z^2} \right] G(z) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2 G(z)}{dz^2} - 2z \frac{dG(z)}{dz} + \left(\frac{\lambda}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1-z^2} \right) G(z) = 0 \quad (6.68)$$

= allgemeine Legendre-DGL (siehe Gl. (5.65)).

Lösungen sind die zugeordneten Legendre-Funktionen (siehe Abschnitt 5.2.17):

$$\begin{aligned} P_l^m(z) &= (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z), \\ l &= 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.69)$$

mit

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1).$$

Aus den Lösungen in beiden Winkelvariablen entstehen die Kugel(flächen)funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ als simultane Eigenfunktionen zu $\hat{l}_3$ und $\hat{l}^2$:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \phi) &:= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \\ \hat{l}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi), \\ \hat{l}_3 Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Eigenschaften: Orthonormiert und vollständig + ... Siehe Abschnitt 5.2.17.

Außerdem

$$\hat{l}_{\pm} Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1}(\theta, \phi). \quad (6.71)$$

Beweis: Entweder durch explizites Nachrechnen oder mit Hilfe des nächsten Abschnitts.

6.5.3 Algebraische Ableitung der Drehimpulseigenwerte

Im Folgenden wird das Symbol „ $\wedge$ “ zur Kennzeichnung von Operatoren unterdrückt. Außerdem unterscheidet sich die Normierung der Operatoren um einen Faktor $\hbar$ von derjenigen der Drehimpulsoperatoren.

Gegeben: Hilbert-Raum mit drei hermiteschen Operatoren J_i , die die Vertauschungsrelationen

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (6.72)$$

erfüllen. Mit den Definitionen

$$\vec{J}^2 := J_i J_i, \quad J_{\pm} := J_1 \pm iJ_2$$

ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_j] &= [J_i J_i, J_j] = J_i [J_i, J_j] + [J_i, J_j] J_i = J_i i\epsilon_{ijk}J_k + i\epsilon_{ijk}J_k J_i \\ &= i\epsilon_{ijk}J_i J_k - i\epsilon_{ijk}J_i J_k = 0, \Rightarrow [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0, \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$[J_3, J_{\pm}] = [J_3, J_1 \pm iJ_2] = iJ_2 \pm J_1 = \pm J_{\pm}, \quad (6.74)$$

$$[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] = 2J_3, \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2 = J_+ J_- - \frac{1}{2}[J_+, J_-] + J_3^2 \\ &= J_+ J_- - J_3 + J_3^2 \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$= J_- J_+ - \frac{1}{2}[J_-, J_+] + J_3^2 = J_- J_+ + J_3 + J_3^2. \quad (6.77)$$

- 1. Schritt: Da vertauschbare Operatoren denselben Satz von Eigenzuständen besitzen, wollen wir J_3 und $\vec{J}^2$ simultan diagonalisieren. Bezeichnung der entsprechenden Eigenzustände zunächst mit $|\lambda, \mu\rangle$:

$$J_3 |\lambda, \mu\rangle = \mu |\lambda, \mu\rangle, \quad (6.78)$$

$$\vec{J}^2 |\lambda, \mu\rangle = \lambda |\lambda, \mu\rangle, \quad (6.79)$$

mit reellen μ und λ , da $\vec{J}^2$ und J_3 hermitesch sind.

Satz 1: Seien A und B lineare Operatoren mit $A|a\rangle = a|a\rangle$ und $[A, B] = \alpha B$. Dann gilt: $B|a\rangle$ ist Eigenzustand zu A mit

Eigenwert $a + \alpha$, falls $B|a\rangle \neq 0$. Denn:

$$\begin{aligned} A(B|a\rangle) &= (AB)|a\rangle = (BA + [A, B])|a\rangle = BA|a\rangle + \alpha B|a\rangle \\ &= (a + \alpha)(B|a\rangle). \end{aligned}$$

- 2. Schritt: Konstruktion weiterer Zustände durch Anwendung von Satz 1 mit Hilfe von Gl. (6.73) und (6.74) liefert:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2(J_{\pm}|\lambda, \mu\rangle) &= \lambda(J_{\pm}|\lambda, \mu\rangle), \\ J_3(J_{\pm}|\lambda, \mu\rangle) &= (\mu \pm 1)(J_{\pm}|\lambda, \mu\rangle), \end{aligned}$$

falls $J_{\pm}|\lambda, \mu\rangle \neq 0$. $J_{\pm}$ ist Auf- bzw. Absteigeoperator für J_3 . Die Eigenwerte von J_3 sind in Abständen von 1 angeordnet.

Satz 2: Sei A ein hermitescher Operator. Dann gilt $\langle\psi|A^2|\psi\rangle \geq 0$ für einen beliebigen normierten Zustand. Denn: Entwickle einen allgemeinen Zustand nach Eigenzuständen eines vollständigen Satzes vertauschbarer hermitescher Operatoren, von denen A einer sei:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} |\alpha, \beta\rangle \quad \text{mit} \quad A|\alpha, \beta\rangle = \lambda_{\alpha} |\alpha, \beta\rangle, \quad \lambda_{\alpha} \in \mathbb{R},$$

wobei β kollektiv für die restlichen zur vollständigen Bezeichnung notwendigen Eigenwerte steht.

$$\langle\psi|A^2|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha', \beta'} C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha'\beta'} \underbrace{\langle\alpha, \beta|A^2|\alpha', \beta'\rangle}_{\lambda_{\alpha'}^2 \langle\alpha, \beta|\alpha', \beta'\rangle} = \sum_{\alpha, \beta} |C_{\alpha\beta}|^2 \lambda_{\alpha}^2 \geq 0.$$

- 3. Schritt: Zusammenhang zwischen λ und einem maximalen Eigenwert j von J_3 . Gegeben sei ein Eigenzustand $|\lambda, \mu\rangle$ zu $\vec{J}^2$ und J_3 . Mit Hilfe von Satz 2 gilt

$$0 \leq \lambda = \langle\lambda, \mu|\vec{J}^2|\lambda, \mu\rangle = \langle\lambda, \mu|J_1^2 + J_2^2 + \mu^2|\lambda, \mu\rangle \geq \mu^2.$$

Wenden wir nun J_+ auf $|\lambda, \mu\rangle$ an und normieren das Resultat, finden wir analog

$$\lambda \geq (\mu + 1)^2$$

oder nach n -maliger Wiederholung

$$\lambda \geq (\mu + n)^2,$$

was für genügend großes n auf einen Widerspruch führt. Deshalb nehmen wir an, dass für ein $\mu_{\max} =: j$

$$J_+|\lambda, j\rangle = 0$$

gilt. Mit Hilfe von Gl. (6.77) finden wir für diesen Zustand

$$\lambda|\lambda, j\rangle = \vec{J}^2|\lambda, j\rangle = [J_-J_+ + J_3(J_3+1)]|\lambda, j\rangle = j(j+1)|\lambda, j\rangle,$$

d. h. $\lambda = j(j+1)$. Für die Eigenvektoren schreiben wir im Folgenden $|j, m\rangle$, benutzen also insbesondere die Quantenzahl j statt des Eigenwertes $j(j+1)$ zur Charakterisierung.

- 4. Schritt: Existenz eines minimalen Eigenwertes $-j$ zu J_3 . Gegeben sei $|j, j\rangle$. Wende nun J_- an, normiere das Resultat und gehe wie oben vor: $\Rightarrow j(j+1) \geq (j-1)^2$ und nach n -maliger Anwendung $j(j+1) \geq (j-n)^2 = (n-j)^2$, was für genügend großes n auf einen Widerspruch führt. $\Rightarrow \exists \mu_{\min}$ mit

$$J_-|j, \mu_{\min}\rangle = 0.$$

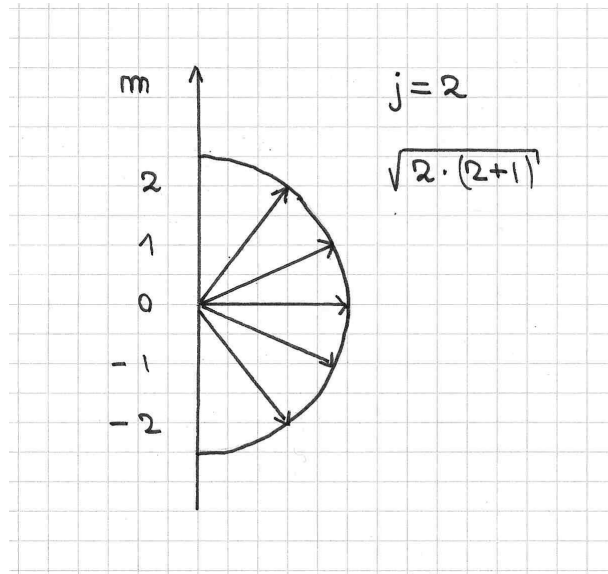
Mit Hilfe von Gl. (6.76) gilt

$$\begin{aligned} j(j+1)|j, \mu_{\min}\rangle &= \vec{J}^2|j, \mu_{\min}\rangle = [J_+J_- + J_3(J_3-1)]|j, \mu_{\min}\rangle \\ &= \mu_{\min}(\mu_{\min}-1)|j, \mu_{\min}\rangle \end{aligned}$$

mit den Lösungen $\mu_{\min} = -j$ und $\mu_{\min} = j+1$, wobei die zweite wegen $\mu_{\max} = j$ verworfen werden kann.

- 5. Schritt: Welche Werte für j sind möglich? Für ein gegebenes j reicht das Spektrum von J_3 von $-j$ bis j in ganzzahligen Schritten. Die Anzahl der Eigenwerte $2j+1$ entspricht der Multiplizität bzw. Dimensionalität der Darstellung, muss also eine positive natürliche Zahl sein. $\Rightarrow$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$



Anschauliche Darstellung der Richtungsquantisierung des Drehimpulses für $j = 2$. In einem Eigenzustand zu $\vec{J}^2$ und J_3 sind die beiden anderen Drehimpulskomponenten unscharf (siehe [Teil 2, Übung 12, Aufgabe 1](#)):

$$(\Delta J_{1,2})_{j,m}^2 = \frac{1}{2}(j(j+1) - m^2).$$

- 6. Schritt: Festlegung der relativen Phasen der Zustände eines Multipletts. Betrachte die Norm

$$\|J_{\pm}|j, m\rangle\|^2 = \langle j, m|J_{\pm}^{\dagger}J_{\pm}|j, m\rangle = \langle j, m|J_{\mp}J_{\pm}|j, m\rangle.$$

Benutze Gl. (6.76) und (6.77)

$$J_{\mp}J_{\pm} = \vec{J}^2 - J_3^2 \mp J_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|J_{\pm}|j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m|(\vec{J}^2 - J_3^2 \mp J_3)|j, m\rangle = j(j+1) - m(m \pm 1) \\ &= (j \mp m)(j \pm m + 1). \end{aligned}$$

Wir benutzen die Phasenkonvention

$$\begin{aligned} J_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle. \end{aligned}$$

6.5.4 Spin

Motivation

- Ausgangspunkt: Die Bahndrehimpulsoperatoren aus Abschnitt 6.5.2 führen nur auf ganzzahlige Eigenwerte $j = l = 0, 1, \dots$.
- Frage: Sind die zusätzlichen halbzahligen Werte aus Abschnitt 6.5.3 nur ein (überflüssiges) mathematisches Konstrukt, das in der Natur nicht realisiert ist?

Antwort: Nein!

- Empirische Tatsache: Die in der Natur beobachteten Elementarteilchen besitzen neben ihrer Masse und Ladung einen vom Bewegungszustand unabhängigen Eigendrehimpuls, der Spin genannt wird.
- Fermionen besitzen halbzahligen Spin, Bosonen ganzzahligen Spin (inklusive Null).
- Beispiel: Die Quarks und Leptonen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik besitzen Spin $\frac{1}{2}$.
Die Austauschteilchen Photonen, Gluonen sowie $W^\pm$ - und Z-Bosonen besitzen Spin 1.
Das Higgs-Boson (bisher noch nicht nachgewiesen) besitzt Spin 0.
- Für ein Teilchen mit Ladung q äußert sich der Spin durch ein magnetisches Moment:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{S}. \quad (6.80)$$

g : gyromagnetisches Verhältnis, $\vec{S}$: Spin.

1. Dirac-Gleichung für Elektron: $g = 2$.
2. Quantenelektrodynamische Korrekturen (für Elektron):

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \dots$$

$\alpha \approx \frac{1}{137}$: Feinstrukturkonstante.

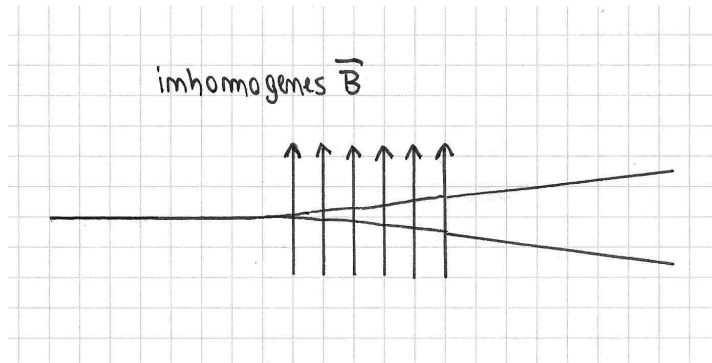
3. Zurzeit: Kontroverse bzgl. $g - 2$ des Myons: Physik jenseits des Standardmodells?

4. Proton: $g = 5,586$, kein elementares Teilchen!

- Historie:

1922: Stern und Gerlach entdecken die Raumquantisierung des magnetischen Momentes in Atomen.

Strahl von Silberatomen fliegt senkrecht zu einem inhomogenen magnetischen Feld. Der Strahl teilt sich in zwei getrennte Strahlen anstelle einer kontinuierlichen Verteilung.



Energie eines magnetischen Dipols in einem äußeren Feld

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Kraft auf den Dipol:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Mit $\vec{B} = B(z)\hat{e}_3$ ergibt sich

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\mu_3 B) = \mu_3 \frac{\partial B}{\partial z} \hat{e}_3.$$

1925: Goudsmit und Uhlenbeck postulieren Existenz des Elektronenspins.

- Vergleich mit dem magnetischen Moment aufgrund eines Bahndrehimpulses.

Ausgangspunkt: Magnetische Dipoldichte aus Gl. (5.102),

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{1}{2c} \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}).$$

Setze für die elektrische Stromdichte

$$\vec{J}(\vec{x}) = q \vec{j}(\vec{x}) = \frac{q\hbar}{2im} \left[\Psi^*(\vec{x}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) - (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}))^* \Psi(\vec{x}) \right],$$

wobei q die Ladung des Teilchens ist. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{M}(\vec{x}) &= \frac{q}{2c} \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi^*(\vec{x}) \vec{x} \times \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) - (\vec{x} \times \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}))^* \Psi(\vec{x}) \right] \\ &= \frac{1}{2c} \frac{q}{2m} \left[\Psi^*(\vec{x}) \hat{\vec{l}} \Psi(\vec{x}) + (\hat{\vec{l}} \Psi(\vec{x}))^* \Psi(\vec{x}) \right]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das mit der Bahnbewegung verknüpfte magnetische Moment ist proportional dem Bahndrehimpuls:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \langle \hat{\vec{l}} \rangle.$$

Darstellung für Spin $\frac{1}{2}$, Pauli-Matrizen

Teil 2, Übung 12, Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= |\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dazu gehört die Matrixdarstellung (Hüte weggelassen)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_2 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ S_3 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{S} &= \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \end{aligned}$$

mit den Pauli-Matrizen σ_i ($i = 1, 2, 3$).

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}\mathbb{1}, \\ \text{Tr}(\sigma_i) &= 0, \\ \sigma_i^\dagger &= \sigma_i. \end{aligned}$$

Jede 2×2 -Matrix A lässt sich als Linearkombination

$$A = a_0\mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 a_i\sigma_i$$

mit (Teil 2, Übung 12, Aufgabe 6)

$$a_0 = \frac{1}{2}\text{Tr}(A), \quad a_i = \frac{1}{2}\text{Tr}(A\sigma_i),$$

darstellen.

Spinoren

Betrachte zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit Elementen

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = \Psi_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \Psi_+\chi_+ + \Psi_-\chi_-$$

mit $\Psi_+, \Psi_- \in \mathbb{C}$ zur Beschreibung des Spinzustands eines Elektrons.

Normierung:

$$|\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2 = 1.$$

Interpretation: $|\Psi_\pm|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von $\hat{S}_3$ den Wert $\pm\frac{\hbar}{2}$ zu finden.

Gegeben sei eine beliebige Richtung, dargestellt durch den Einheitsvektor $\hat{n}$:

$$\hat{n} = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{e}_1 + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{e}_2 + \cos(\theta) \hat{e}_3. \quad (6.81)$$

Wie sieht der Zustand Ψ aus, der

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \Psi = \Psi$$

erfüllt? Sprechweise: Das Teilchen ist in Richtung $\hat{n}$ polarisiert.

Beispiele:

$$1. \hat{n} = \hat{e}_3:$$

$$\sigma_3 \Psi = \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi = \chi_+.$$

$$2. \hat{n} = -\hat{e}_3:$$

$$-\sigma_3 \Psi = \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi = \chi_-.$$

Beachte

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \cos(\phi) - i \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\phi) + i \sin(\theta) \sin(\phi) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) e^{-i\phi} \\ \sin(\theta) e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gesucht:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \Psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) e^{-i\phi} \\ \sin(\theta) e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) - 1 & \sin(\theta) e^{-i\phi} \\ \sin(\theta) e^{i\phi} & -\cos(\theta) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = 0.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 1 & \sin(\theta) e^{-i\phi} \\ \sin(\theta) e^{i\phi} & -\cos(\theta) - 1 \end{pmatrix} = -[\cos^2(\theta) - 1] - \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0 \quad \forall \quad \theta, \phi$$

existiert eine nichttriviale Lösung:

$$\begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (6.82)$$

Bemerkungen:

1. Phase ist Konventionsfrage.

2. Die Komponenten von Spinoren können auch von Ort und Zeit abhängen.

Beispiel: Hamilton-Operator eines Elektrons in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$,

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}) + \mu_B \left(\frac{\hat{\vec{l}}}{\hbar} + 2\hat{\vec{S}} \right) \cdot \vec{B}(\hat{\vec{x}}, t). \quad (6.83)$$

$\Rightarrow$ Pauli-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{x}, t) \\ \Psi_-(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) + \frac{\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{l}} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \right) \mathbb{1} + \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \right] \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{x}, t) \\ \Psi_-(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \quad (6.84)$$

mit dem Bohr'schen Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \quad e > 0.$$

3. Besonderheit von Spinoren

Betrachte $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$:

$$\hat{n} \rightarrow \hat{n} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} \rightarrow - \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}.$$

Erst nach 4π wird der Originalzustand wieder erreicht.

(Gruppentheorie: Spinoren sind Darstellung der Gruppe $SU(2)$).

6.6 Das Zentralkraftproblem

Das Symbol „ $\hat{}$ “ wird in diesem Abschnitt unterdrückt.

6.6.1 Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \Psi(\vec{x}) = E \Psi(\vec{x}). \quad (6.85)$$

Annahme: Zentralpotenzial

$$V(\vec{x}) = U(r), \quad r = |\vec{x}|. \quad (6.86)$$

Zerlegung von $\vec{p}^2$:

$$\vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{\vec{l}^2}{r^2}$$

mit dem hermiteschen Operator (Radialimpuls)

$$p_r = \frac{1}{2} \left(\vec{p} \cdot \frac{\vec{x}}{r} + \frac{\vec{x}}{r} \cdot \vec{p} \right).$$

Explizit:

$$\begin{aligned} p_r \Psi(\vec{x}) &= \frac{\hbar}{2i} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} \Psi(\vec{x}) \right) + \frac{\vec{x}}{r} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) \right] \\ &= \frac{\hbar}{2i} \left[\left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} \right) \right) \Psi(\vec{x}) + 2 \frac{\vec{x}}{r} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi(\vec{x}). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$p_r = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right). \quad (6.87)$$

$\Rightarrow$

$$p_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r. \quad (6.88)$$

Kombiniere Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (siehe Abschnitt 5.2.15) mit Gl. (6.63) und Gl. (6.88).

$\Rightarrow$ Stationäre Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{l}^2}{2mr^2} + U(r) - E \right) \Psi(r, \theta, \phi) = 0. \quad (6.89)$$

Separationsansatz:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (6.90)$$

$\Rightarrow$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) - E \right) R(r) = 0.$$

Setze

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}. \quad (6.91)$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} u(r) + \dots = 0,$$

oder

$$u''(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\underbrace{E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}}_{-U_{\text{eff}}(r)} \right) u(r) = 0. \quad (6.92)$$

Rückführung auf eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit einem effektiven Potenzial (siehe auch Gl. (1.40)).

6.6.2 Qualitative Betrachtungen

Normierung:

$$\|\Psi\|^2 = \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 R^2(r) |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \int_0^\infty dr u^2(r) = 1.$$

$\Rightarrow$

- Für $r \rightarrow \infty$ muss $u^2(r)$ stärker als $1/r$ abfallen.
- Für $r \rightarrow 0$ muss $u^2(r)$ schwächer als $1/r$ zunehmen.

Tatsächlich gilt $u(0) = 0$, denn:

$$\begin{aligned} \langle p_r \rangle &= \int_0^\infty dr r^2 R(r) p_r R(r) = \frac{\hbar}{i} \int_0^\infty dr u(r) u'(r) \\ &= \frac{\hbar}{2i} \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} u^2(r) = \frac{\hbar}{2i} u^2(r) \Big|_0^\infty = -\frac{\hbar}{2i} u^2(0). \end{aligned}$$

$\Rightarrow u(0) = 0$, da der Erwartungswert aufgrund der Hermitizität von p_r reell sein muss.

- Asymptotisches Verhalten für $r \rightarrow 0$.

Annahme: Für $r \rightarrow 0$ lässt sich $U(r)$ gegenüber dem repulsiven Zentrifugalpotenzial

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

vernachlässigen ($l \geq 1$). $\Rightarrow$

$$u_l''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}u_l(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2}u_l(r).$$

Ansatz für $u_l(r)$ für $r \rightarrow 0$:

$$u_l(r) = r^s(a_0 + a_1r + \dots).$$

$\Rightarrow$ (Für den führenden Term)

$$s(s-1) = l(l+1).$$

Reguläre Lösung: $s = l + 1$.

Irreguläre Lösung: $s = -l$.

$\Rightarrow$

$$u_l(r) \sim r^{l+1} \quad \Rightarrow \quad R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r} \sim r^l.$$

- Asymptotisches Verhalten für $r \rightarrow \infty$.

Annahme: $U(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$.

$$u''(r) = -k^2u(r), \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

$\Rightarrow$

$$u(r) \sim e^{\pm ikr}.$$

$E > 0$: asymptotisch periodische Lösungen.

$E < 0$: asymptotische Exponentiallösungen. (Normierbarkeit schließt exponentiell wachsende Lösung aus.)

6.6.3 Freie Bewegung

$U = 0$.

DGL

$$u_l'' - \frac{l(l+1)}{r^2}u_l + k^2u_l = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Allgemeine Lösung

$$u_l(r) = A_l r j_l(kr) + B_l r y_l(kr)$$

mit den sphärischen Bessel-Funktionen der ersten Art, j_l , und der zweiten Art, y_l .

Asymptotisches Verhalten:

$$\begin{aligned} j_l(z) &\stackrel{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)}, \\ y_l(z) &\stackrel{z \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)}{z^{l+1}}, \\ j_l(z) &\stackrel{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z} \sin\left(z - l\frac{\pi}{2}\right), \\ y_l(z) &\stackrel{z \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{z} \cos\left(z - l\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der freien Bewegung zur Energie E :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}) &= \sum_{l,m} [A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} y_l(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi). \\ &:= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \end{aligned}$$

Für eine ebene Welle,

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

gilt $B_{lm} = 0 \forall l$.

Beschreibung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{k} &: (k, \theta_k, \phi_k), \\ \vec{x} &: (r, \theta, \phi). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Alternative Beschreibungen der freien Bewegung:

Operatoren	p_1, p_2, p_3	$H, \vec{l}^2, l_3$
Eigenwerte	$\hbar k_1, \hbar k_2, \hbar k_3$	$E, \hbar^2 l(l+1), \hbar m$
Eigenfunktionen	$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$	$j_l(kr)Y_{lm}(\theta, \phi)$

6.6.4 Das Wasserstoffatom

Attraktives Potenzial:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (6.93)$$

DGL für $u(r)$:

$$u''(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \underbrace{\frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}}_{-U_{\text{eff}}(r)} \right) u(r) = 0. \quad (6.94)$$

Gesucht: Spektrum der gebundenen Zustände ($E < 0$).

1. Schritt: DGL dimensionslos schreiben.

$$\kappa := \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \quad \text{bestimmt das asymptotische Verhalten der Radialwellenfunktion,}$$

$$\rho := \kappa r,$$

$$\rho_0 := \frac{2mZe^2}{\hbar^2 \kappa},$$

$$v(\rho) := u(r).$$

$$\Rightarrow \quad v'' - \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] v = 0. \quad (6.95)$$

2. Schritt: Verhalten für $\rho \rightarrow \infty$.

$$\rho \rightarrow \infty : \quad v'' - v = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim e^{-\rho}.$$

(e^ρ ist nicht quadratintegrierbar).

3. Schritt: Ansatz für allgemeine Lösung.

$$v(\rho) = e^{-\rho} \sum_{i=l+1}^{\infty} a_i \rho^i. \quad (6.96)$$

Bemerkung: Es ist in der Regel ratsam, sowohl das Verhalten bei Null als auch das asymptotische Verhalten für große ρ aus der Radialwellenfunktion herauszuziehen.

$$\begin{aligned} v' &= e^{-\rho} \sum_i a_i (-\rho^i + i\rho^{i-1}), \\ v'' &= e^{-\rho} \sum_i a_i [\rho^i - i\rho^{i-1} - i\rho^{i-1} + i(i-1)\rho^{i-2}]. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL. Faktor $e^{-\rho} \neq 0$ kann gekürzt werden. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i a_i \left[\underbrace{\rho^i - 2i\rho^{i-1} + i(i-1)\rho^{i-2}}_{\text{von } v''} \underbrace{-\rho^i}_{\text{von } E} \right. \\ &\quad \left. \underbrace{+\rho_0\rho^{i-1}}_{\text{von Coul.}} \underbrace{-l(l+1)\rho^{i-2}}_{\text{Zentrifugalpot.}} \right] \\ &= \sum_i \left\{ a_i \rho^{i-2} [i(i-1) - l(l+1)] + a_i \rho^{i-1} (\rho_0 - 2i) \right\}. \end{aligned}$$

Beachte: Der erste Term des ersten Summanden ($i = l + 1$) verschwindet, deshalb Indexverschiebung $i \rightarrow i + 1$:

$$0 = \sum_i \underbrace{\left\{ a_{i+1} [(i+1)i - l(l+1)] + a_i (\rho_0 - 2i) \right\}}_{=0} \rho^{i-1},$$

da Potenzreihe nur dann identisch verschwindet, wenn jeder Term verschwindet.

$\Rightarrow$ Rekursionsbeziehung

$$a_{i+1} = \frac{2i - \rho_0}{i(i+1) - l(l+1)} a_i. \quad (6.97)$$

Für große i :

$$a_{i+1} \approx \frac{2}{i} a_i.$$

Vergleiche mit

$$e^{2\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \rho^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\rho)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \rho^i.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} = \frac{2^{i+1}}{(i+1)!} \frac{i!}{2^i} = \frac{2}{i+1} \approx \frac{2}{i} \quad \text{für große } i.$$

$\Rightarrow$

$$v(\rho) = e^{-\rho} \sum_i \dots \sim e^\rho \quad \text{divergiert,}$$

es sei denn, die Reihe bricht ab.

$\Rightarrow$

$$\rho_0 = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diskussion:

1.

$$\frac{2mZe^2}{\hbar^2 \kappa} = 2n \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{mZe^2}{\hbar^2 n} \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} = \frac{m^2 Z^2 e^4}{\hbar^4 n^2}.$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{E_n = -\frac{(Ze)^2}{2a_B n^2}, \quad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}.} \quad (6.98)$$

Bohr-Radius: $a_B = 0,529 \text{ \AA} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$

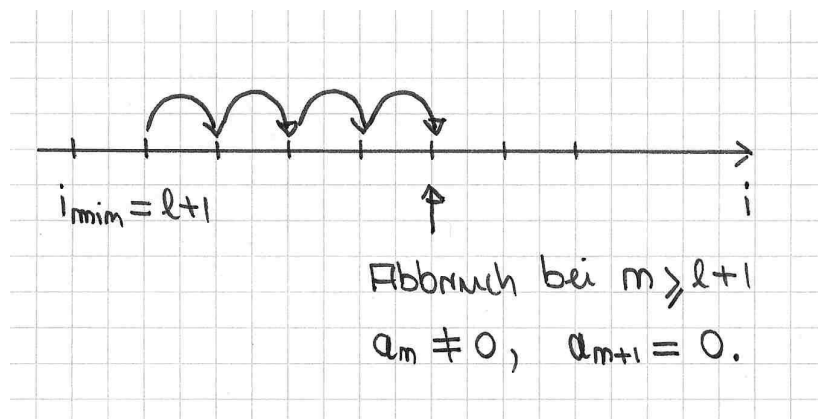
$Z = 1$:

$$\boxed{E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}, \quad n \in \mathbb{N}.} \quad (6.99)$$

$$\kappa_n = \frac{Z}{na_B}. \quad (6.100)$$

2. Kennzeichnung der Radialwellenfunktion durch zwei Quantenzahlen n und l :

$$a_{i+1}^{n,l} = \frac{2(i-n)}{i(i+1) - l(l+1)} a_i^{n,l}.$$



3. Nomenklatur

n	l	n_r	Nomenklatur	Entartung
1	0	0	1s	1
2	0	1	2s	1
	1	0	2p	3
3	0	2	3s	1
	1	1	3p	3
	2	0	3d	5

- (a) Hauptquantenzahl $n = l + n_r + 1$.
- (b) Entartungsgrad: n^2 ($\times 2$ mit Spin).
- (c) n_r : Anzahl der Knoten in der Radialwellenfunktion.
Nullstelle im Ursprung und in ∞ nicht mitgezählt.
- (d) Vergleich: Dreidimensionaler Oszillator

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad n = 2n_r + l, \quad n_r \geq 0.$$

4. Beispiele

- (a) $n = 1$

$$a_{i+1}^{1,0} = \frac{2(i-1)}{i(i+1)} a_i^{1,0}.$$

Beginn bei $i = 0 + 1 = 1$, Abbruch bei $i = 1$:

$$R_{1,0}(r) = \frac{u_{1,0}(r)}{r} \sim e^{-\kappa_1 r}.$$

$$\Psi_{1s}(\vec{x}) = \left(\frac{Z^3}{\pi a_B^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_B}}. \quad (6.101)$$

Test der Normierung

$$\begin{aligned}
 1 &\stackrel{?}{=} \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 |\Psi_{1s}|^2 \\
 &= \frac{Z^3}{\pi a_B^3} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 e^{-\beta r} \quad \left(\beta = \frac{2Z}{a_B} \right) \\
 &= 4 \frac{Z^3}{a_B^3} \frac{d^2}{d\beta^2} \underbrace{\int_0^\infty dr e^{-\beta r}}_{\frac{1}{\beta}} \\
 &= 4 \frac{Z^3}{a_B^3} \frac{2}{\left(\frac{2Z}{a_B}\right)^3} = 1 \quad \checkmark.
 \end{aligned}$$

$r^2 R_{1,0}^2(r) dr = u_{1,0}^2(r) dr$: Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Elektron in einer Kugelschale mit den Radien r und $r + dr$.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 e^{-\frac{2Zr}{a_B}} \right) = \left(2r - r^2 \frac{2Z}{a_B} \right) e^{-\frac{2Zr}{a_B}} \stackrel{!}{=} 0.$$

$\Rightarrow$

$$r = \frac{a_B}{Z}.$$

Wasserstoffatom: Maximum auf Kugelschale bei $r = a_B$.

Schwere Kerne: Maximum $\sim 1/Z$, näher am Kern.

(b) Allgemeine Form der Coulomb-Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{x} | n, l, m \rangle &= \Psi_{nlm}(\vec{x}) \\
 &= N_{nl} e^{-\kappa_n r} (2\kappa_n r)^l L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa_n r) Y_{lm}(\theta, \phi).
 \end{aligned}$$

i. Normierungskonstante (Vorzeichen ist Frage der Konvention)

$$N_{nl} = - \left(\frac{(n-l-1)!(2\kappa_n)^3}{2n[(n+l)!]^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ii. L_{n+l}^{2l+1} : Zugeordnetes Laguerre'sches Polynom.

5. $E > 0$ führt zu kontinuierlichem Spektrum.

Lösungen: Kummer'sche oder konfluente, hypergeometrische Funktionen.

6. (Einfachstes) Schalenmodell des Atoms

Betrachte Z Elektronen mit Koordinaten $\vec{x}_i$ im Feld eines Z -fach geladenen Atomkerns unter Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen.

Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^Z \left(-\frac{\hbar^2 \Delta_i}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right), \quad r_i = |\vec{x}_i|. \quad (6.102)$$

Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung

$$H\Psi = E\Psi$$

mit Hilfe des Produktansatzes

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) = \prod_{i=1}^Z \Psi_{n_i l_i m_i}(\vec{x}_i) \quad \text{für} \quad E = \sum_{i=1}^Z E_{n_i}. \quad (6.103)$$

Auffüllen der einzelnen Zustände unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips: In jedem atomaren Einteilchenzustand, der durch die Quantenzahlen n , l und m beschrieben wird, können sich gemäß der zwei Spinorientierungen $m_s = \pm \frac{1}{2}$ nur zwei Elektronen befinden.

Die Gesamtheit der Elektronen eines Atoms, die Zustände mit gleicher Hauptquantenzahl n besetzen, bilden eine Elektronenschale.

$n = 1$: K -Schale, $n = 2$: L -Schale, usw.

Beispiele

Z	Element	Elektronenkonfiguration
1	H	1s
2	He	$(1s)^2$
3	Li	$(1s)^2 2s$
$\vdots$		
10	Ne	$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6$
11	Na	$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 3s$
$\vdots$		
18	Ar	$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^6$
19	K	$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^6 4s$
$\vdots$		

Einfaches Modell kann nicht erklären, weshalb im Anschluss an Argon nicht die 3d-Niveaus als nächste aufgefüllt werden. $\Rightarrow$ Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen (Abschirmung des Kernfeldes).

6.7 Näherungsmethoden für stationäre Zustände

Motivation: Viele quantenmechanische Probleme sind nicht exakt lösbar. $\Rightarrow$ Notwendigkeit von Näherungsverfahren.

6.7.1 Zeitunabhängige Störungstheorie

Gegeben: Hamilton-Operator der Form

$$H = H_0 + \lambda H_1. \quad (6.104)$$

Gesucht: Lösungen zu

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte E_n^0 und Eigenzustände $|n^0\rangle$ von H_0 exakt bekannt sind, d. h.

$$H_0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle. \quad (6.105)$$

Annahme: Bei hinreichend schwacher Störung lassen sich Eigenenergien und -zustände in eine Potenzreihe des Parameters λ entwickeln:

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots, \quad (6.106)$$

$$|n\rangle = |n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \lambda^2|n^2\rangle + \dots. \quad (6.107)$$

Bemerkungen:

1. Häufig ist die Reihe nicht konvergent.

Statt dessen asymptotische Reihe

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k + R_m(\lambda)$$

mit

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_m(\lambda)}{\lambda^m} &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(\lambda) &= \infty. \end{aligned}$$

2. Ob die Störung klein ist, hängt sowohl von λ als auch den Matrixelementen von H_1 ab.

6.7.2 Störungstheorie für nicht entartete Zustände

Annahme: $\{|n^0\rangle\}$ nicht entartet und orthonormiert.

Einsetzen von Gl. (6.106) und (6.107) in stationäre Schrödinger-Gleichung liefert

$$\begin{aligned} (H_0 + \lambda H_1) (|n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \dots) \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \dots) (|n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \dots). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\lambda^0 : H_0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle, \quad (6.108)$$

$$\lambda^1 : H_0|n^1\rangle + H_1|n^0\rangle = E_n^0|n^1\rangle + E_n^1|n^0\rangle, \quad (6.109)$$

$$\lambda^2 : H_0|n^2\rangle + H_1|n^1\rangle = E_n^0|n^2\rangle + E_n^1|n^1\rangle + E_n^2|n^0\rangle, \quad (6.110)$$

$\vdots$

„Rechentrick“: Lege Normierung von $|n\rangle$ durch

$$\langle n^0|n\rangle = 1$$

fest, d. h.

$$\begin{aligned} \lambda\langle n^0|n^1\rangle + \lambda^2\langle n^0|n^2\rangle + \dots &= 0, \\ \Rightarrow \langle n^0|n^1\rangle = \langle n^0|n^2\rangle = \dots &= 0. \end{aligned} \quad (6.111)$$

1. Energieverschiebung der ersten Ordnung.

„Multipliziere“ Gl. (6.109) mit $\langle n^0|$:

$$\langle n^0|H_1|n^0\rangle + \underbrace{\langle n^0|H_0|n^1\rangle}_{E_n^0\langle n^0|n^1\rangle} = E_n^0\langle n^0|n^1\rangle + E_n^1\underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_1.$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{E_n^1 = \langle n^0|H_1|n^0\rangle.} \quad (6.112)$$

2. Erste Korrektur zum Zustand $|n^0\rangle$.

Entwickle $|n^1\rangle$ nach $\{|n^0\rangle\}$:

$$|n^1\rangle = \sum_m |m^0\rangle \langle m^0|n^1\rangle \stackrel{\text{Gl. (6.111)}}{=} \sum_{m \neq n} c_{mn}^1 |m^0\rangle \quad (6.113)$$

mit

$$c_{mn}^1 = \langle m^0|n^1\rangle. \quad (6.114)$$

„Multipliziere“ Gl. (6.109) mit $\langle m^0| \neq \langle n^0|$ und verwende Gl. (6.114):

$$\begin{aligned} \langle m^0|H_1|n^0\rangle + \underbrace{\langle m^0|H_0|n^1\rangle}_{E_m^0\langle m^0|n^1\rangle = E_m^0 c_{mn}^1} &= E_n^0\langle m^0|n^1\rangle + E_n^1\underbrace{\langle m^0|n^0\rangle}_0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$c_{mn}^1 = \frac{\langle m^0 | H_1 | n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}. \quad (6.115)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|n^1\rangle = \sum_{m \neq n} c_{mn}^1 |m^0\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^0 | H_1 | n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |m^0\rangle.} \quad (6.116)$$

3. Energieverschiebung der zweiten Ordnung.

„Multipliziere“ Gl. (6.110) mit $\langle n^0 |$:

$$\underbrace{\langle n^0 | H_0 | n^2 \rangle}_{E_n^0 \langle n^0 | n^2 \rangle} + \langle n^0 | H_1 | n^1 \rangle = E_n^0 \langle n^0 | n^2 \rangle + E_n^1 \underbrace{\langle n^0 | n^1 \rangle}_0 + E_n^2 \underbrace{\langle n^0 | n^0 \rangle}_1.$$

Verwende Gl. (6.116) für $|n^1\rangle$. $\Rightarrow$

$$\boxed{E_n^2 = \langle n^0 | H_1 | n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^0 | H_1 | n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}.} \quad (6.117)$$

4. Bemerkungen:

- (a) Für den Grundzustand ist die Energieverschiebung zweiter Ordnung immer negativ.
- (b) Wegen des Energienenners liefern benachbarte Niveaus einen größeren Beitrag, sofern die Matrixelemente von H_1 vergleichbar sind.

6.7.3 Störungstheorie für entartete Zustände

Annahme: $|n^0, i\rangle$ N_n -fach entartet, d. h.

$$H_0 |n^0, i\rangle = E_n^0 |n^0, i\rangle \quad (i = 1, \dots, N_n). \quad (6.118)$$

Störungstheorie ist Entwicklung in

$$\lambda \frac{\langle m^0 | H_1 | n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}.$$

Verwende Basissystem mit

$$\langle n^0, \alpha | H_1 | n^0, \beta \rangle = H_{1,n,\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N_n), \quad (6.119)$$

um divergente Energienenner zu vermeiden.

Beachte: H_1 ist hermitescher Operator $\Rightarrow$

$$\mathcal{H}_{1,n} = (\langle n^0, i | H_1 | n^0, j \rangle) \quad \text{ist hermitesche } N_n \times N_n\text{-Matrix.} \quad (6.120)$$

Ähnlichkeitstransformation für hermitesche Matrizen: Zu einer hermiteschen Matrix H' existiert eine unitäre Matrix S , so dass

$$H = S^\dagger H' S$$

eine reelle Diagonalmatrix ist.

Hier: $\mathcal{H}_{1,n} := H'$ und $\tilde{\mathcal{H}}_{1,n} := H$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{1,n} &= (\langle n^0, \alpha | H_1 | n^0, \beta \rangle) \\ &= \left(\sum_{i,j} \langle n^0, \alpha | n^0, i \rangle \langle n^0, i | H_1 | n^0, j \rangle \langle n^0, j | n^0, \beta \rangle \right) \\ &= \mathcal{S}^\dagger \mathcal{H}_{1,n} \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (6.121)$$

wobei (Basiswechsel)

$$\mathcal{S} = (\langle n^0, j | n^0, \beta \rangle).$$

Mit den neuen Basiszuständen $|n^0, \alpha\rangle$ lässt sich die Störungstheorie wie zuvor aufziehen.

6.7.4 Variationsprinzip

Für einen Hamilton-Operator H mit Basis $\{|n\rangle\}$ gilt für beliebiges $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \sum_n \langle \Psi | H | n \rangle \langle n | \Psi \rangle \\ &= \sum_n E_n \langle \Psi | n \rangle \langle n | \Psi \rangle \\ &\geq E_0 \sum_n \langle \Psi | n \rangle \langle n | \Psi \rangle \\ &= E_0 \langle \Psi | \Psi \rangle \end{aligned}$$

und somit

$$E_0 \leq \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (6.122)$$

Ritz'sches Variationsprinzip: Wähle $|\Psi(\mu)\rangle$ als Funktion eines bzw. mehrerer reeller Parameter μ und bestimme Minimum des Ausdrucks

$$E(\mu) = \frac{\langle \Psi(\mu) | H | \Psi(\mu) \rangle}{\langle \Psi(\mu) | \Psi(\mu) \rangle}.$$

Es gilt

$$\min \{E(\mu)\} \geq E_0.$$

Beispiel: Eindimensionaler harmonischer Oszillator. Setze $\hbar = \omega = m = 1$.

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right).$$

Testfunktion

$$\Psi(x, \mu) = \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right), \quad \mu > 0.$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\mu x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right) &= -\mu x \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right), \\ \frac{d^2}{dx^2} \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right) &= -\mu \frac{d}{dx} \left[x \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right) \right] \\ &= -\mu \left[\exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right) + x(-\mu x) \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right) \right] \\ &= (\mu^2 x^2 - \mu) \exp \left(-\frac{\mu x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\mu x^2) (-\mu^2 x^2 + \mu + x^2).$$

Verwende

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 \exp(-\mu x^2) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\partial}{\partial \mu} \exp(-\mu x^2) \\
 &= - \frac{d}{d\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp(-\mu x^2) \\
 &= - \frac{d}{d\mu} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \\
 &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}.
 \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left((1 - \mu^2) \frac{1}{2\mu} + \mu \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right).$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 E(\mu) &= \frac{1}{4} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right), \\
 E'(\mu) &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \stackrel{!}{=} 0.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu = 1$ mit

$$\min \{E(\mu)\} = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2} \geq E_0 = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Wir haben das tatsächliche Minimum gefunden, da der Ansatz vom Typ der Grundzustandswellenfunktion entspricht (siehe Gl. (6.53)).

Kapitel 7

Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe

Definition eines Körpers. Eine nichtleere Menge $\mathbb{K}$ heißt ein **Körper**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Auf $\mathbb{K}$ ist eine Verknüpfung $+$ je zweier Elemente erklärt, die folgende Eigenschaften hat:
 - (a) Abgeschlossenheit bzgl. Addition:
 $\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K}$.
 - (b) Assoziativgesetz bzgl. Addition:
 $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$.
 - (c) Neutrales Element bzgl. Addition:
 $\exists 0 \in \mathbb{K}$ mit $0 + a = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
 - (d) Inverses Element:
 $\forall a \in \mathbb{K} \ \exists b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$.
 - (e) Kommutativgesetz bzgl. Addition:
 $a + b = b + a \ \forall a, b \in \mathbb{K}$.
2. Auf $\mathbb{K}$ ist eine weitere Verknüpfung (Multiplikation) erklärt, die folgende Eigenschaften besitzt:
 - (a) Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation:
 $\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $ab \in \mathbb{K}$.
 - (b) Assoziativgesetz bzgl. Multiplikation:
 $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(ab)c = a(bc)$.
 - (c) Einselement bzgl. Multiplikation:
 $\exists 1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ und $1a = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
 - (d) Inverses Element zu $a \neq 0$:
 $\forall a \in \mathbb{K}/\{0\} \ \exists b \in \mathbb{K}$ mit $ba = 1$.
 - (e) Kommutativgesetz bzgl. Multiplikation:
 $ab = ba \ \forall a, b \in \mathbb{K}$.

3. Es gilt das Distributivgesetz:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}.$$

Standardbeispiele: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition einer Gruppe. Unter einer (abstrakten) **Gruppe** G verstehen wir eine nichtleere Menge, in der jedem geordneten Paar $(a, b) \in G \times G$ ein Element ab von G zugeordnet wird (Abgeschlossenheit), so dass gilt:

(G1) $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz).

(G2) Es existiert ein Element $e \in G$ mit $ea = ae = a \quad \forall a \in G$ (Einselement).

(G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $a^{-1} \in G$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (inverses Element).

Eine Gruppe G heißt genau dann **kommutativ** oder **abelsch**, wenn $ab = ba \quad \forall a, b \in G$.

Definition eines Vektorraums. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V heißt ein **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** ($\mathbb{K}$ -VR) oder linearer Raum über $\mathbb{K}$, falls gilt:

1. Auf V ist eine Verknüpfung $+$ (Vektoraddition) definiert, und V ist bzgl. $+$ eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element von V mit 0 .
2. Für jedes $v \in V$ und jedes $k \in \mathbb{K}$ ist genau ein Element $kv \in V$ (Skalarmultiplikation) definiert. Dabei gilt:
 - (a) Ist 1 das Einselement von $\mathbb{K}$, so ist $1v = v \quad \forall v \in V$.
 - (b) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v, \quad (k_1k_2)v = k_1(k_2v) \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$.
 - (c) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2 \quad \forall k \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$.

Definition eines affinen Raums. Ein affiner Raum $A = (V, \mathcal{P}, v)$ besteht aus einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V , einer Menge $\mathcal{P}$, deren Elemente Punkte genannt werden, und einer Abbildung $v : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow V$, die je zwei Elementen P, Q aus $\mathcal{P}$ einen Vektor $v(P, Q) \in V$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für alle Punkte $P \in \mathcal{P}$ und alle Vektoren $v \in V$ existiert genau ein Punkt $Q \in \mathcal{P}$ mit $v(P, Q) = v$.
2. $v(P, Q) + v(Q, R) = v(P, R) \quad \forall P, Q, R \in \mathcal{P}$.

Schreibweise: $v(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$, d.h. $\overrightarrow{PQ}$ ist der dem Paar (P, Q) zugeordnete Vektor in V .

Bemerkungen:

1. Jeder Vektorraum V ist in trivialer Weise ein affiner Raum über sich selbst, wenn man die Abbildung $V \times V \rightarrow V$ mit $(v, w) \mapsto w - v$ betrachtet.
2. Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n$ ist der abstrakte affine Raum über dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Definition einer Norm. Sei V ein $\mathbb{K}$ -VR. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt eine **Norm** auf V , wenn gilt:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. $\|kv\| = |k|\|v\| \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{K}$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (Dreiecksungleichung).

$\|v\|$: Norm von v . $(V, \|\cdot\|)$: Normierter Vektorraum.

Definition einer Cauchy-Folge und eines Banach-Raums.

1. Eine Folge $(v_n)_{n \geq n_0}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $k_0 = k_0(\epsilon)$ mit $\|v_m - v_n\| < \epsilon$ für $m, n > k_0$.
2. Der normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig** oder ein **Banach-Raum**, wenn jede Cauchy-Folge in $(V, \|\cdot\|)$ einen Grenzwert in V hat.

Definition eines Skalarprodukts. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei V ein $\mathbb{K}$ -VR. Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ein **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf V , wenn gilt:

1. $\langle v | v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad \langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^* \quad \forall u, v \in V$, insbesondere $\langle u | u \rangle$ reell,
3. $\langle u | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle \quad \forall u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\langle u | v \rangle$: Skalares Produkt von u mit v . $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$: Skalarproduktraum oder Prä-Hilbert-Raum. $\langle u | v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$.

Nomenklatur: Ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über dem Körper $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) heißt euklidischer Raum (unitärer) Raum.

Satz: Sei U ein vollständiger Unterraum des Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Dann läßt sich jedes $x \in V$ eindeutig darstellen in der Form

$$x = y + z \quad \text{mit} \quad y \in U, z \in U^\perp.$$

Es gilt also $V = U \oplus U^\perp$.

Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum. **Kanonische Norm:** $\|u\| := \sqrt{\langle u | u \rangle}$.

Definition eines Hilbert-Raums. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum und $\|\cdot\|$ die kanonische Norm auf V . Ist $(V, \|\cdot\|)$ vollständig, so heißt V ein **Hilbert-Raum**.

Definition eines metrischen Raumes. Eine nichtleere Menge M heißt genau dann ein **metrischer Raum**, wenn zwei beliebigen Punkten $u, v \in M$ eine reelle Zahl $d(u, v) \geq 0$ zugeordnet ist, so dass für alle $u, v, w \in M$ gilt:

1. $d(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$ (Symmetrie);
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (Dreiecksungleichung).

$d(u, v)$ heißt der Abstand zwischen den beiden Punkten u und v , das Paar (M, d) wird metrischer Raum genannt.

Für uns relevant:

Normierte Räume, Hilbert- und Banach-Räume sind metrische Räume:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$