

Mathematischer Brückenkurs
für StudienanfängerInnen
in Physik, Meteorologie und Chemie

PD Dr. Georg von Hippel



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Wintersemester 2018/2019

Wichtige Vorbemerkungen zur Web-Version

*“Denn was man schwarz auf weiß besitzt,
Kann man getrost nach Hause tragen.”*

Diese Worte, die Goethe dem Schüler in seinem *Faust* in den Mund legt, sind natürlich ironisch zu nehmen – Informationen, die auf dem Schreibblock (oder im iPad), aber eben nicht im Kopf existieren, sind kein Wissen, man hat also durchs bloße Nach-Hause-Tragen nichts dazugelernt.

In diesem Sinne kann auch der Download dieser Folien zum Mathematik-Brückenkurs den Besuch der Vorlesung und das intensive eigene Nacharbeiten derselbigen bestenfalls ergänzen, jedoch keinesfalls ersetzen – zumal in den Folien die durch das gesprochene Wort transportierten Informationen ebenso fehlen wie die zahlreichen an der Tafel behandelten Herleitungen und Beispiele.

Unter Vorausschickung dieses *caveat* werden die Folien für den gesamten Brückenkurs hiermit für die KursteilnehmerInnen in der Hoffnung, bei der Nachbereitung hilfreich zu sein, zum ausschließlich persönlichen Gebrauch verfügbar gemacht.

Sinn und Zweck des Brückenkurses

- Mathematik ist wichtig
 - “Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben.” (nach Galileo)
 - ... oder zumindest naturwissenschaftliche Theorien sind es!
 - Mathematische Kompetenz als Voraussetzung für das Studium der Naturwissenschaften
- Unterschiedliches Ausgangsniveau
- Unterschied von Schul- und Universitätsmathematik
- Ziel des Brückenkurses: Lücken schließen

Sinn und Zweck des Brückenkurses

- Mathematik ist wichtig
- Unterschiedliches Ausgangsniveau
 - Unterschiedliche Bundesländer
 - Unterschiedliche Schultypen und –profile
 - Unterschiedliche Leistungskurse und Lehrer
- Unterschied von Schul- und Universitätsmathematik
- Ziel des Brückenkurses: Lücken schließen

Sinn und Zweck des Brückenkurses

- Mathematik ist wichtig
- Unterschiedliches Ausgangsniveau
- Unterschied von Schul- und Universitätsmathematik
 - “Matheschock”
 - Schule: spezifische Typen von Rechenaufgaben, Lösungswege lernen
 - Universität: allgemeine Theoreme, Beweise verstehen
- Ziel des Brückenkurses: Lücken schließen

Sinn und Zweck des Brückenkurses

- Mathematik ist wichtig
- Unterschiedliches Ausgangsniveau
- Unterschied von Schul- und Universitätsmathematik
- Ziel des Brückenkurses: Lücken schließen
 - Ausgleich von Wissensunterschieden
 - Brücke zur Universitätsmathematik

Literatur

- 1 J. Erven, M. Erven, J. Hörwick, *Vorkurs Mathematik*, Oldenbourg (München, 2010)
- 2 H. J. Korsch, *Mathematik-Vorkurs*, Binomi Verlag (Barsinghausen, 2008)
- 3 H. J. Korsch, *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, Binomi Verlag (Barsinghausen, 2008)
- 4 M. Kallenrode, *Rechenmethoden der Physik: Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik*, Springer (Berlin, 2005)
- 5 P. van Dongen, *Einführungskurs Mathematik und Rechenmethoden*, Springer Spektrum (Wiesbaden, 2015)
- 6 G. Walz, F. Zeilfelder, G. Rießinger, *Brückenkurs Mathematik*, Springer Spektrum (Berlin und Heidelberg, 2014)
- 7 K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz, *Mathematik für Physiker 1-3*, Springer (Berlin, 2007)
- 8 K. Jänich, *Mathematik 1+2: geschrieben für Physiker*, Springer (Berlin, 2005)
- 9 I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch Verlag (Frankfurt/Main, 2008)

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
 - Etwas Logik und Mengenlehre
 - Die natürlichen, ganzen und reellen Zahlen
 - Die komplexen Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
 - Folgen
 - Grenzwerte
 - Endliche und unendliche Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
 - Eigenschaften von Funktionen
 - Elementare Funktionen
 - Stetigkeit und Differenzierbarkeit
 - Taylor-Reihen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

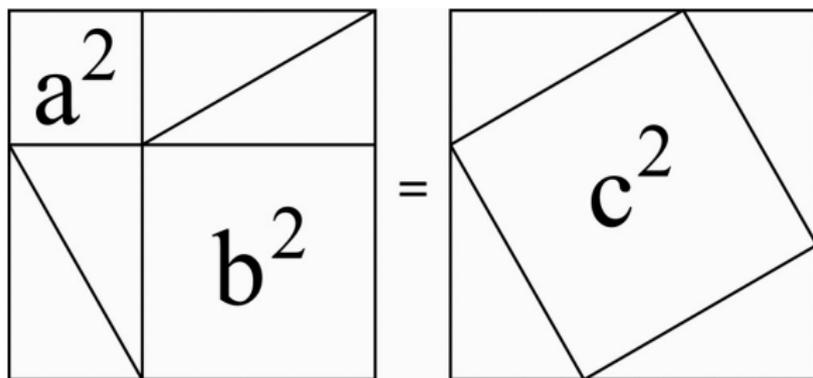
- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
 - Integration und Integrierbarkeit
 - Integrale elementarer Funktionen
 - Integrationsregeln
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
 - Vektoren und Vektorräume
 - Skalarprodukte und Vektorprodukt im \mathbb{R}^3
 - Lineare Abbildungen und Matrizen
 - Lineare Gleichungssysteme und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
 - Partielle Ableitungen
 - Integration im \mathbb{R}^n
 - Vektoranalysis im \mathbb{R}^3
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
 - Mittelwert und Varianz von Messreihen
 - Die Normalverteilung
 - Fehlerfortpflanzung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

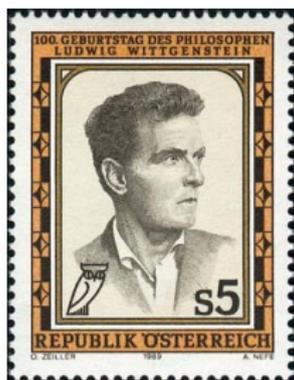
- 1 Mengen und Zahlen
- 2 Folgen und Reihen
- 3 Funktionen und ihre Ableitungen
- 4 Integration und Integrale
- 5 Vektoren, Matrizen und Determinanten
- 6 Funktionen mehrerer Variablen
- 7 Fehlerrechnung
- 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen
 - Wichtige Beispiele
 - Lösungsmethoden
 - Schwingungen mit und ohne Dämpfung



- Mathematik muss präzise sein \leadsto benötigt eine präzise Sprache
- Beweise müssen schlüssig sein \leadsto (informale) Logik als Lehre vom korrekten Schlussfolgern
- Aussagen sind sprachliche Ausdrücke, denen ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden kann.
- Zweiwertige Logik: Jede Aussage ist entweder wahr (W) oder falsch (F) – “*tertium non datur*”.

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen können in Wahrheitstafeln dargestellt werden.



LUDWIG WITTGENSTEIN
(1889–1951)

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Negation (“nicht”, \neg): $\neg p$ ist wahr genau dann, wenn p falsch ist.

p	$\neg p$
W	F
F	W

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Konjunktion (“und”, \wedge): $p \wedge q$ ist wahr genau dann, wenn (g.d.w.) p und q beide wahr sind.

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Disjunktion (“oder”, \vee): $p \vee q$ ist wahr g.d.w. wenigstens eine von p und q wahr ist.

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Implikation (“wenn ..., dann ...”, \Rightarrow): $p \Rightarrow q$ ist wahr, es sei denn p ist wahr und q ist falsch.

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Etwas Logik – II

- Aussagen können zu neuen Aussagen kombiniert werden (Aussagenlogik): “Heute ist Montag *und* ich bin in Mainz.”
- Logische Verknüpfungen verbinden Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Äquivalenz (“g.d.w.”, \Leftrightarrow): $p \Leftrightarrow q$ ist wahr g.d.w. p und q beide denselben Wahrheitswert haben.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

- Aussagen können durch die Anwendung von Prädikaten auf Variablen oder Konstanten gebildet werden (Prädikatenlogik):
“*Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.*”
- Eine Aussageform ist ein Ausdruck, der mindestens eine Variable enthält, und zu einer Aussage wird, wenn man für jede auftauchende Variable einen Ausdruck aus dem in Frage kommenden Diskursbereich einsetzt.
- Quantoren erlauben die Bildung logischer Aussagen aus Aussageformen:
 - Universalität (“für alle”, \forall): $\forall x P(x)$ ist wahr, wenn $P(x)$ für alle x wahr ist.
 - Existenz (“es gibt”, \exists): $\exists x P(x)$ ist wahr, wenn es ein x_0 gibt, für das $P(x_0)$ wahr ist.

Etwas Logik – III

- Aussagen können durch die Anwendung von Prädikaten auf Variablen oder Konstanten gebildet werden (Prädikatenlogik):
“*Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.*”
- Eine Aussageform ist ein Ausdruck, der mindestens eine Variable enthält, und zu einer Aussage wird, wenn man für jede auftauchende Variable einen Ausdruck aus dem in Frage kommenden Diskursbereich einsetzt.
- Bei Aussagen mit Quantoren spielt deren Reihenfolge eine wesentliche Rolle – z.B. ist $\forall x \exists y$ y ist Mutter von x zweifellos wahr, wenn der Definitionsbereich “Säugetiere” ist, die Vertauschung der Quantoren aber ergibt eine eindeutig falsche Aussage.
- Informalerweise werden wir den Quantor \forall oftmals weggelassen – z.B. in $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ für $\forall a \forall b$ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Etwas Logik – IV

Regeln von De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \neg P(x))$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \neg P(x))$$



AUGUSTUS DE MORGAN
(1806–1871)

Direkter Schluss (*modus ponens*):

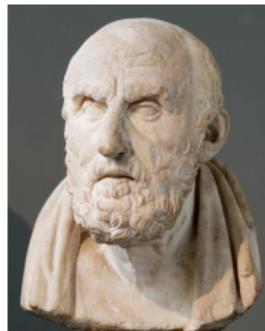
$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

Schluss durch Widerspruch (*modus tollens*):

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

Kettenschlussregel:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$



CHRYSIPPOS
(ca. 279–206 v.Chr.)

Etwas (naive) Mengenlehre

Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Gegenständen unseres Denkens zu einem Ganzen, das heißt, zu einem neuen Gegenstand.

[nach Cantor]



GEORG CANTOR
(1845–1918)

- Fundamentale Beziehung: Gegenstand x ist Element von Menge A , $x \in A$.
- Für $\neg(x \in A)$ schreiben wir kurz $x \notin A$.
- Die Menge aller x , für die $P(x)$ wahr ist, wird als $\{x|P(x)\}$ geschrieben. Es gilt:
 $x \in \{x|P(x)\} \Leftrightarrow P(x)$.

Etwas (naive) Mengenlehre

Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Gegenständen unseres Denkens zu einem Ganzen, das heißt, zu einem neuen Gegenstand.

[nach Cantor]



GEORG CANTOR
(1845–1918)

- Endliche Mengen können auch einfach aufgezählt werden, z.B.
 $\{1, 2, 3\} = \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$.
- Extensionalitätsprinzip: Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt, d.h. insbesondere $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$,
 $\{a, b, b\} = \{a, b\}$ etc.

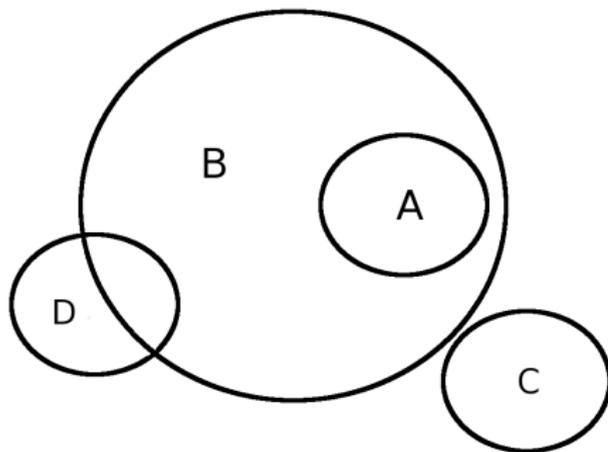
- Eine Menge A ist Teilmenge einer anderen Menge B , $A \subseteq B$, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind:
$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \ x \in A \Rightarrow x \in B)$$
- Wenn A Teilmenge von B ist und B zudem noch Elemente enthält, die nicht Elemente von A sind, sagen wir, dass A eine echte Teilmenge von B ist, $A \subset B$.
- Wegen des Extensionalitätsprinzips gilt:
$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$$

Etwas Mengenlehre – II

- Eine Menge A ist Teilmenge einer anderen Menge B , $A \subseteq B$, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind:
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \ x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Relationen zwischen Mengen können durch Venn-Diagramme veranschaulicht werden.

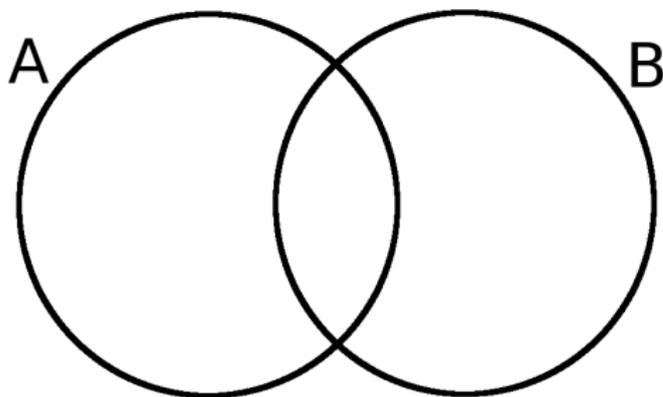


JOHN VENN
(1834–1923)



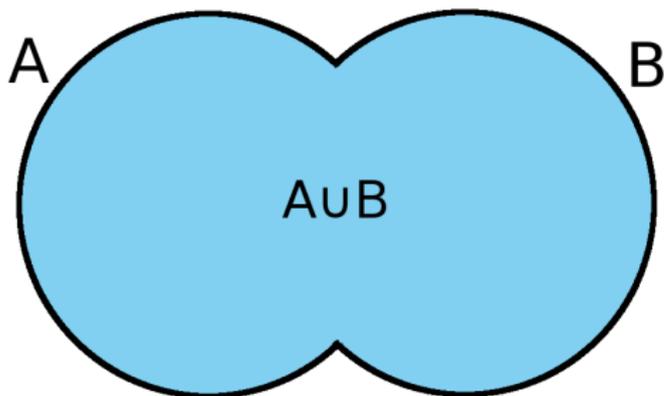
Etwas Mengenlehre – III

- Mengenoperationen erlauben, aus bekannten Mengen neue Mengen zu bilden.



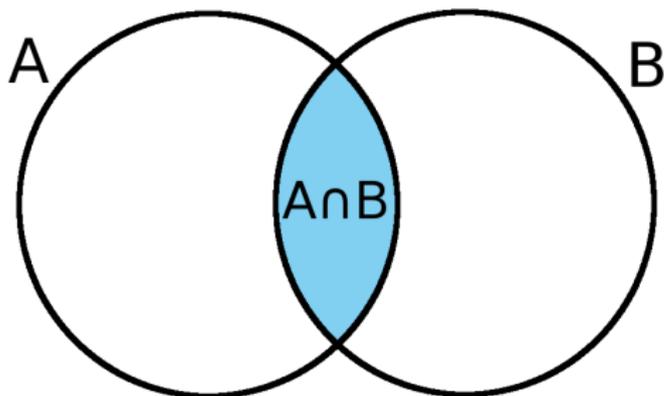
Etwas Mengenlehre – III

- Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ von A und B enthält alle Elemente von A und alle Elemente von B :
$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$



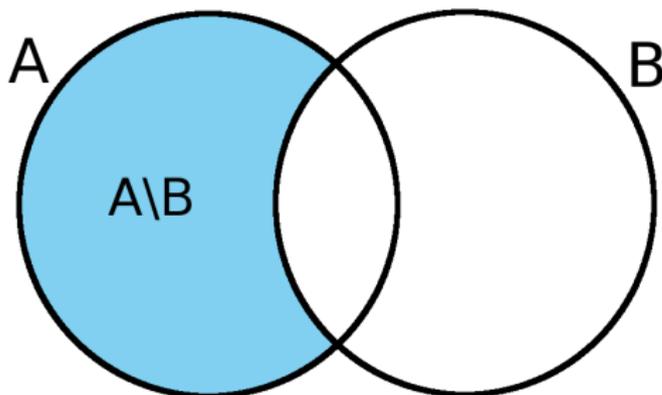
Etwas Mengenlehre – III

- Die Schnittmenge $A \cap B$ von A und B enthält alle Elemente von A , die auch Elemente von B sind:
 $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.



Etwas Mengenlehre – III

- Die Differenzmenge $A \setminus B$ von A und B enthält alle Elemente von A , die nicht Elemente von B sind:
$$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B).$$



- Nützlicherweise definiert man die leere Menge $\emptyset = \{\}$.
- Eine weitere wichtige Definition ist das kartesische Produkt:
Für Mengen A_1, A_2 ist

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\}$$

die Menge der (geordneten) Paare, deren i -te Komponente aus A_i stammt.

- Für $x, y \in A_1 \times A_2$ gilt $x = y \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$.
- Für $A_1 = \dots = A_n = A$ schreibt man kurz $A^n = A \times \dots \times A$.

Gleichungen

- Eine Gleichung ist eine Aussageform, die die Gleichheit zweier Ausdrücke feststellt.
- Definitionsmenge D , soweit nicht anderweitig eingeschränkt, ist die größte Menge, für deren Elemente die Gleichung eindeutig wahr oder falsch ist.
- Lösungsmenge $L \subseteq D$ ist die Menge aller $x \in D$, für die die Gleichung wahr ist.
- Äquivalenzumformungen sind solche Operationen, die L unverändert lassen:
 - Anwendung derselben *umkehrbaren* Operation auf beiden Seiten,
 - Ersetzen eines Teilausdrucks durch einen für alle $x \in D$ gleichwertigen.

Die natürlichen Zahlen

- “Zählzahlen” – $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Fundamentale Operation: zählen, d.h. Bildung der nächsthöheren Zahl (Nachfolger) $a \mapsto a + 1$
- Fundamentale Eigenschaft: Prinzip der vollständigen Induktion, d.h. jede natürliche Zahl wird von Null aus durch wiederholte Nachfolgerbildung erreicht
- Formal: Peano-Axiome
 - $0 \in \mathbb{N}$
 - $\forall n \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$
 - $\forall n \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \neq 0$
 - $\forall n \forall m \ (n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m) \Rightarrow n + 1 \neq m + 1$
 - $\forall U \ (U \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in U \wedge \forall n \ (n \in U \Rightarrow n + 1 \in U)) \Rightarrow U = \mathbb{N}$



GIUSEPPE PEANO
(1858–1932)

Die natürlichen Zahlen – II

- Auf \mathbb{N} sind Addition $+$ und Multiplikation \cdot sowie eine Ordnung \leq definiert.
- Die Addition
 - ist assoziativ, $(a + b) + c = a + (b + c)$,
 - ist kommutativ, $a + b = b + a$,
 - hat 0 als neutrales Element, $a + 0 = a$.
- Die Multiplikation
 - ist assoziativ, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
 - ist kommutativ, $a \cdot b = b \cdot a$,
 - hat 1 als neutrales Element, $a \cdot 1 = a$.
- Addition und Multiplikation sind distributiv,
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
- Die Ordnung
 - ist transitiv, $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$,
 - ist vollständig, $a \leq b \vee b \leq a$, sowie $(a \leq b \wedge b \leq a) \Leftrightarrow a = b$
 - ist mit der Addition verträglich, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

Die natürlichen Zahlen – III

- Für $a, b \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $s, r \in \mathbb{N}$ mit $r < b$, so dass $a = sb + r$
- r heißt der Rest bei Division von a durch b . Man schreibt auch $a \bmod b = r$ und sagt, a sei kongruent zu r modulo b .
- Wenn $r = 0$, so heißt b ein Teiler von a , und a durch b (ohne Rest) teilbar.
- Jede natürliche Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar.
- Eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern heißt Primzahl. (1 ist also keine Primzahl!)
- Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

Rekursive Definitionen

Aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion können Operationen auf \mathbb{N} rekursiv definiert werden.

Beispiele:

- Potenz a^n , definiert durch $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$.
- Fakultät $n!$, definiert durch $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.
- Summenzeichen mit Definition

$$\sum_{i=n}^n a_i = a_n, \quad \sum_{i=n}^{m+1} a_i = a_{m+1} + \sum_{i=n}^m a_i,$$

wobei

$$\sum_{i=n}^m a_i = 0, \quad m < n.$$

Beweis durch vollständige Induktion

Aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion können wir $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ beweisen, indem wir $P(0)$ und $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$ zeigen.

Beweisschema:

- 1 Induktionsanfang: Wir überprüfen, dass $P(0)$ gilt.
- 2 Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $P(n)$ (mit n beliebig) gilt, und zeigen damit $P(n+1)$.
- 3 Damit ist $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ bewiesen!

Die ganzen Zahlen

- $x + a = b$ hat für $a, b \in \mathbb{N}$ nur dann eine Lösung $x = (b - a) \in \mathbb{N}$, wenn $a \leq b$.
- Um auch für $a > b$ eine Lösung angeben zu können, erweitern wir den Zahlenbereich auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- Die Addition, Multiplikation und Ordnung von \mathbb{N} setzen sich auf natürliche Weise auf \mathbb{Z} fort.
- Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten auch auf \mathbb{Z} . Zudem hat jedes $z \in \mathbb{Z}$ ein additives Inverses $(-z) \in \mathbb{Z}$ mit $z + (-z) = 0$.¹
- Es gilt: $(-1) \cdot a = (-a)$ und $(-1) \cdot (-1) = 1$.
- Für $a \leq b$ gilt $(-b) \leq (-a)$, und für $c \geq 0$ auch $ac \leq bc$.

¹Mathematisch gesprochen: \mathbb{Z} ist ein Ring mit einer Eins.

Die rationalen Zahlen

- $a \cdot x = b$ hat für $a, b \in \mathbb{Z}$ nur dann eine Lösung $x = b/a \in \mathbb{Z}$, wenn a ein Teiler von b ist.
- Um für alle $a \neq 0$, eine Lösung angeben zu können, erweitern wir den Zahlbereich auf die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \geq 1 \right\}.$$

- Für $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$.
- Die Addition, Multiplikation und Ordnung von \mathbb{Z} setzen sich auf natürliche Weise auf \mathbb{Q} fort, wenn wir

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \quad \text{und} \quad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

definieren.

Die rationalen Zahlen – II

- Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten auch auf \mathbb{Q} . Zudem hat jedes $x \in \mathbb{Q}$ ein additives Inverses $(-x) \in \mathbb{Q}$, und jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ hat ein multiplikatives Inverses $(x^{-1}) \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot (x^{-1}) = 1$.²
- Es gilt: $\frac{ap}{aq} = \frac{p}{q}$, $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$.
- Die Ordnung auf \mathbb{Q} ist in sich dicht: zwischen zwei rationalen Zahlen liegen stets unendlich viele weitere rationale Zahlen.

²Mathematisch gesprochen: \mathbb{Q} ist ein Körper.

Irrationale Zahlen

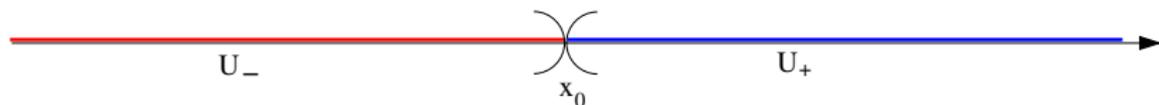
- Die Menge der rationalen Zahlen hat trotzdem “Lücken”.
- Beispielsweise hat $x^2 = 2$ keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$.
- Die Lösungen $\pm\sqrt{2}$ von $x^2 = 2$ sind Beispiele für irrationale Zahlen.
- Weitere Beispiele für irrationale Zahlen sind π und e .
- Irrationale Zahlen lassen sich jedoch beliebig genau durch rationale Zahlen annähern, z.B. durch endliche Dezimalbrüche der Form

$$”z, d_1 d_2 \dots d_L” = z + \sum_{k=1}^L \frac{d_k}{10^k}$$

mit $z \in \mathbb{Z}$, $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Die reellen Zahlen

- Durch Erweiterung des Zahlbereichs auf alle unendlichen Dezimalbrüche (mit dem Verständnis, dass z.B. $0,2999\dots = 0,3$) können wir auch irrationale Zahlen darstellen und erhalten so die reellen Zahlen \mathbb{R} .
- Addition und Multiplikation mitsamt ihren Inversen, sowie die Ordnung setzen sich von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} fort.
- Im Gegensatz zu \mathbb{Q} ist die Ordnung auf \mathbb{R} zudem vollständig:
 - Für alle nicht-leeren $U_- \subset \mathbb{R}$, $U_+ \subset \mathbb{R}$ mit $\forall x_- \in U_- \forall x_+ \in U_+ x_- < x_+$ existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x_- \in U_- \forall x_+ \in U_+ x_- \leq x_0 \leq x_+$.
 - Jede konvergente Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.



Die reellen Zahlen – II

- Wichtige Teilmengen von \mathbb{R} :

- Intervalle:

$$\begin{aligned} [a; b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & (a; b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ (a; b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & [a; b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \end{aligned}$$

- positive reelle Zahlen $\mathbb{R}^+ = (0; \infty)$,
 - multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

- Betrag, definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

erfüllt $|ax| = |a||x|$ und $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ (für $x \neq 0$) sowie die Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Die reellen Zahlen – III

Wir erweitern den Potenzbegriff wie folgt:

- Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist $(-b) \in \mathbb{N}$ und wir setzen $a^b = (a^{-b})^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}^*$.
- Für $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ist $b = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q \geq 2$, und wir setzen $a^b = (\sqrt[q]{a})^p$ mit $\sqrt[q]{a} \in \mathbb{R}^+$ der eindeutig bestimmten Lösung von $x^q = a$ für $a \in \mathbb{R}^+$.
- Für $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}^+$ definieren wir a^b als den (eindeutigen) Grenzwert von a^{b_k} mit $b_k \in \mathbb{Q}$, $b_k \rightarrow b$.

Mit diesen Definitionen gelten die bekannten Potenzgesetze:

$$(ab)^c = a^c b^c \quad (a^b)^c = a^{bc} \quad a^b a^c = a^{b+c}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Die reellen Zahlen – IV

Der Logarithmus zur Basis b ist definiert durch

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$$

Es gelten die Logarithmengesetze:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c \quad \log_b(a^c) = c \log_b a$$

$$\log_c a = \frac{1}{\log_b c} \log_b a$$

Häufig wird $\log x = \ln x = \log_e x$, $\lg x = \log_{10} x$ und $\text{ld } x = \log_2 x$ abgekürzt.

Schreibweisen für Zahlen

Wissenschaftliche Schreibweise:

$$m \times 10^e$$

mit e so gewählt, dass m genau eine Vorkommastelle ungleich Null hat. (Beispiele: $0,031 = 3,1 \times 10^{-2}$, $5010 = 5,01 \times 10^3$)

Prozent und Promille:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2}$$

$$1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0,001 = 10^{-3} = 0,1\%$$

Polynome

- Ein Polynom vom Grad D ist ein Ausdruck der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^D a_i x^i,$$

wobei $x^0 = 1$.

- Die Summe und das Produkt zweier Polynome sind wiederum Polynome.³ Der Grad des Produkts ist dabei die Summe der einzelnen Grade (wenn wir dem Polynom $p(x) = 0$ formell den Grad ∞ zuordnen).
- Eine algebraische Gleichung D -ten Grades ist eine Gleichung der Form

$$p(x) = 0$$

für ein Polynom p vom Grad D .

³Die Polynome bilden also einen Ring.

Polynome – II

- Wenn $x = c$ eine Lösung einer algebraischen Gleichung vom Grad D ist, so kann diese als

$$(x - c)q(x) = 0$$

mit q einem Polynom vom Grad $D - 1$ geschrieben werden.

- Für Polynome $p(x)$, $q(x)$ vom Grad $D_p \geq D_q$ schreibe $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$ mit Polynomen $m(x)$ und $r(x)$ vom Grad D_m und $D_r \leq D_q$.

Polynomdivision

- Bestimme den führenden Koeffizienten von $m(x)$ so, dass der führende Koeffizient von $p(x) - m(x)q(x)$ verschwindet.
- Ersetze $p(x)$ durch den Rest $p(x) - m(x)q(x)$ und wiederhole den vorangehenden Schritt für den jeweils nächsten Koeffizienten von $m(x)$ solange, bis der Grad des verbleibenden Restes kleiner als D_q ist.
- Der letzte verbleibende Rest ist $r(x)$.

- Es gilt: Polynome über \mathbb{R} können durch Polynomdivision in die Form

$$p(x) = a \prod_i (x^2 + b_i x + c_i)^{d_i} \prod_j (x - e_j)^{f_j}$$

mit $b_i^2 - 4c_i < 0$ zerlegt werden.

- In \mathbb{R} hat jede algebraische Gleichung mit ungeradem Grad mindestens eine Lösung.
- Die einzigen Lösungen, die algebraischen Gleichungen in \mathbb{R} “fehlen”, kommen daher, dass $x^2 = -1$ keine Lösung in \mathbb{R} hat.

Die komplexen Zahlen

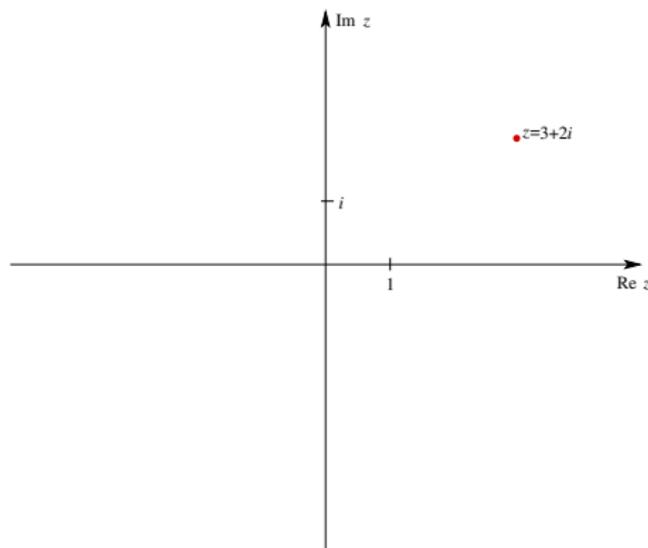
- Indem wir \mathbb{R} um eine Lösung $x = i$ von $x^2 = -1$ ergänzen, erhalten wir die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- Visualisierung als Gauss'sche Zahlenebene:



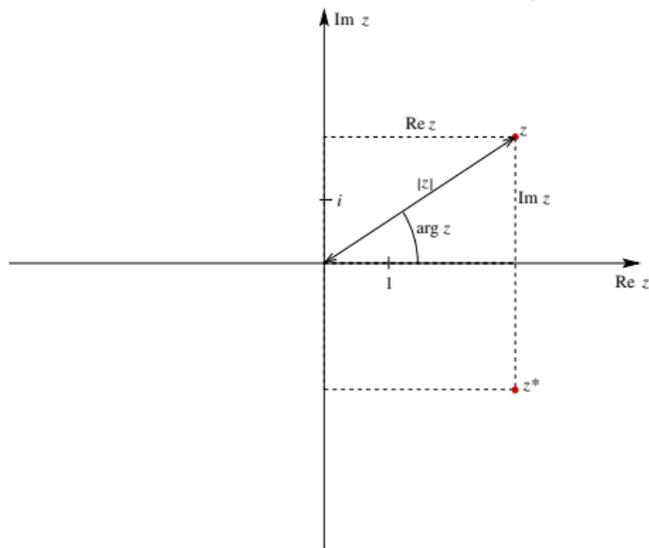
CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777–1855)



Die komplexen Zahlen – II

Wir bezeichnen i als imaginäre Einheit und nennen für $z = a + bi$

- $\operatorname{Re} z = a$ den Realteil,
- $\operatorname{Im} z = b$ den Imaginärteil,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ den Betrag,
- $\arg(z) = \arctan \frac{b}{a} + \varkappa$ das Argument (für $z \neq 0$),
- $z^* = a - bi$ die komplex konjugierte Zahl



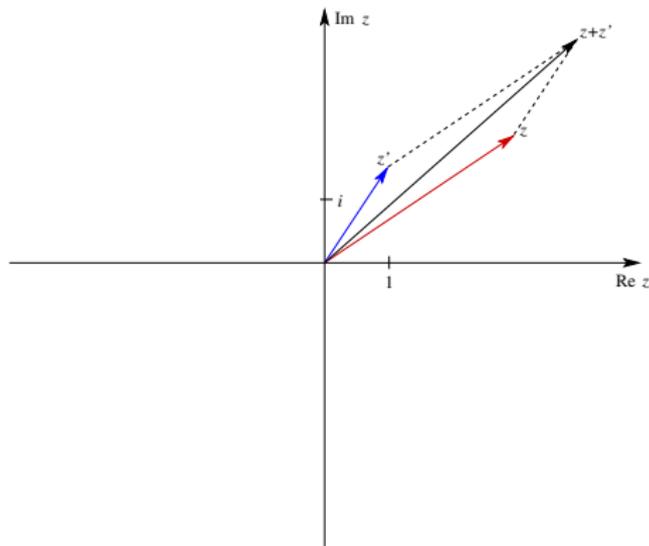
von z . Damit gilt $|z^*| = |z|$ und $\arg(z^*) = -\arg(z)$.

Die komplexen Zahlen – III

- Addition und Subtraktion wirken auf Real- und Imaginärteil separat:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$



Die komplexen Zahlen – III

- Addition und Subtraktion wirken auf Real- und Imaginärteil separat:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- Die Multiplikation mischt Real- und Imaginärteil:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- Die Division ist wegen $zz^* = |z|^2$ durch

$$z^{-1} = z^* / |z|^2$$

definiert.

- Diese Operationen genügen den Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzen.⁴

⁴Also ist auch \mathbb{C} ein Körper.

Die komplexen Zahlen – IV

- Eulersche Formel:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

für $\phi \in \mathbb{R}$. Es gilt $|e^{i\phi}| = 1$,
 $e^{2\pi ni} = 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

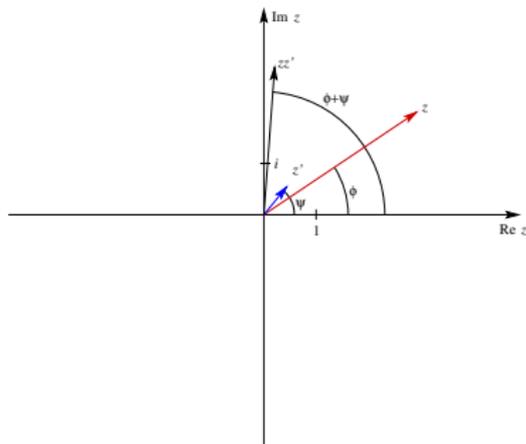
- Polardarstellung komplexer Zahlen als $z = |z|e^{i \arg(z)}$.
- Multiplikation in Polardarstellung:

$$(re^{i\phi}) (se^{i\psi}) = (rs)e^{i(\phi+\psi)}$$

- Beachte: Logarithmen sind in \mathbb{C} mehrdeutig.



LEONHARD EULER
(1707–1783)



Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung vom Grad > 0 hat eine Lösung in \mathbb{C} .

- Mathematisch gesprochen: \mathbb{C} ist ein abgeschlossener Körper.
- \mathbb{C} schließt somit den Bereich der Zahlen in gewisser Weise ab.
- Wir haben die folgenden Beziehungen zwischen den Zahlenbereichen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Im Gegensatz zu \mathbb{R} lässt sich \mathbb{C} nicht mehr in einer mit den algebraischen Operationen verträglichen Weise ordnen.

Anwendungen der komplexen Zahlen

- Trigonometrische Identitäten lassen sich wegen

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$

$$\sin \phi = \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi})$$

leicht herleiten.

- Darstellung von Phasenbeziehungen im Zeigerdiagramm, komplexe Widerstände.

Anwendungen der komplexen Zahlen – II

- Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra lassen sich rationale Funktionen ($n < m$) als

$$\frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + x^m} = \frac{a_n(x - x_1)^{d_1} \dots (x - x_r)^{d_r}}{(x - y_1)^{e_1} \dots (x - y_s)^{e_s}}$$

schreiben.

- Damit können wir eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{a_n(x - x_1)^{d_1} \dots (x - x_r)^{d_r}}{(x - y_1)^{e_1} \dots (x - y_s)^{e_s}} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{e_i} \frac{A_{ij}}{(x - y_i)^j}$$

durchführen und die A_{ij} durch Koeffizientenvergleich finden.

- Anwendung in der Integralrechnung (s. später).

Definition

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element $f(x)$ der Zielmenge W eindeutig zuordnet, $x \mapsto f(x)$.

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto$ Lösung für z von $z^2 = x$, ist keine Funktion, aber $h : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty), x \mapsto \sqrt{x}$, ist eine.
- Matrikelnummer : JGU-Studierende $\rightarrow \mathbb{N}$,
 $s \mapsto$ Matrikelnummer von s .

Definition

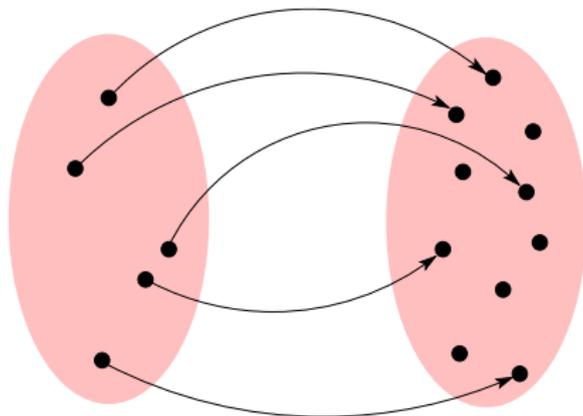
Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element $f(x)$ der Zielmenge W eindeutig zuordnet, $x \mapsto f(x)$.

- Für $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ definieren wir die Verkettung $g \circ f : A \rightarrow C$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Die Bildmenge $\text{Im } f = \{f(x) | x \in D\} \subseteq W$ ist die Menge aller auftretenden Funktionswerte.
- Eine Funktion kann durch ihren Graphen $\text{Graph } f = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subset D \times W$ repräsentiert werden.

Funktionen – II

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt

- **injektiv**, wenn $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **surjektiv**, wenn $\forall y \in W \exists x \in D y = f(x)$,
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

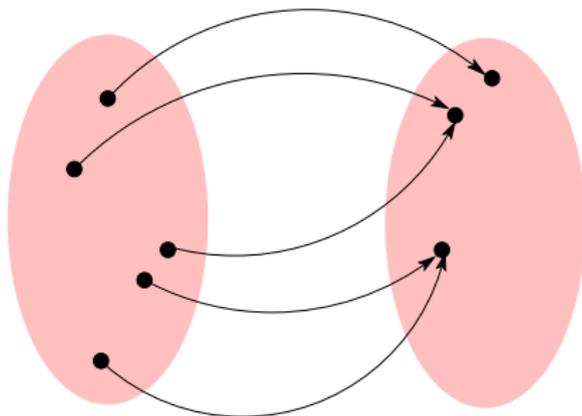


Für bijektives $f : D \rightarrow W$ existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, so dass $\forall x \in D f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in W f(f^{-1}(y)) = y$.

Funktionen – II

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt

- **injektiv**, wenn $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **surjektiv**, wenn $\forall y \in W \exists x \in D y = f(x)$,
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

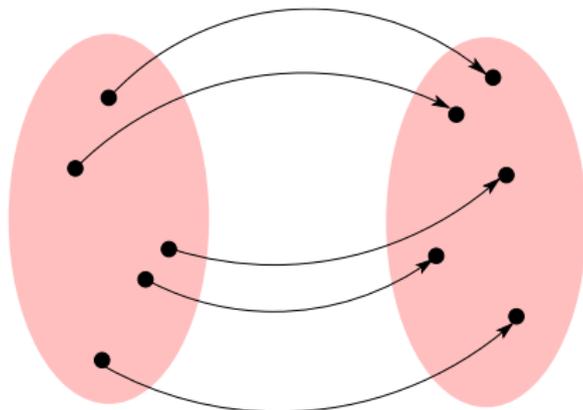


Für bijektives $f : D \rightarrow W$ existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, so dass $\forall x \in D f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in W f(f^{-1}(y)) = y$.

Funktionen – II

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt

- **injektiv**, wenn $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **surjektiv**, wenn $\forall y \in W \exists x \in D y = f(x)$,
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

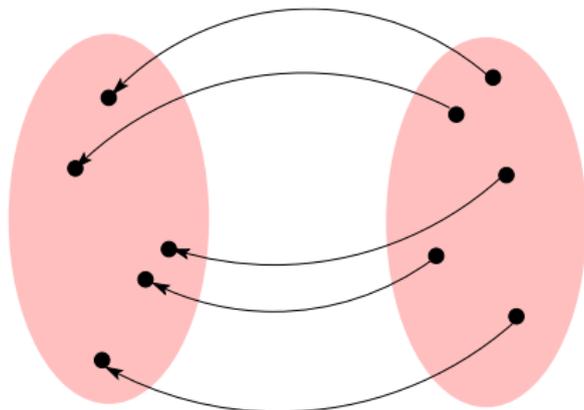


Für bijektives $f : D \rightarrow W$ existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, so dass $\forall x \in D f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in W f(f^{-1}(y)) = y$.

Funktionen – II

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt

- **injektiv**, wenn $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **surjektiv**, wenn $\forall y \in W \exists x \in D y = f(x)$,
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.



Für bijektives $f : D \rightarrow W$ existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, so dass $\forall x \in D f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in W f(f^{-1}(y)) = y$.

Definition

Unter einer Zahlenfolge verstehen wir eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ (oder $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$). Die a_n heißen Glieder der Folge.

Beispiele:

- $a_n = n$; Folgenglieder: 0, 1, 2, 3, ...
- $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; Folgenglieder: 1, 1/4, 1/9, ...
- $a_n = \pi^{\frac{n+1}{n+2}}$; Folgenglieder: $\sqrt{\pi}$, $\pi^{2/3}$, $\pi^{3/4}$, ...
- $a_n = (-2)^n$; Folgenglieder: 1, -2, 4, -8, ...

Eine Zahlenfolge heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq S$,
- **nach unten beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq S$,
- **beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq S$,
- **monoton wachsend**, wenn $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geq a_n$,
- **monoton fallend**, wenn $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \leq a_n$,
- **streng monoton wachsend**, wenn $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} > a_n$,
- **streng monoton fallend**, wenn $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} < a_n$,
- **alternierend**, wenn $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} a_n < 0$,
- **Nullfolge**, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n| < \epsilon$.

Grenzwert einer Folge

Definition

Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge a_n , $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wenn $(a_n - a)$ Nullfolge ist.

Beispiele:

- eine Nullfolge hat den Limes Null, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) = 2$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Grenzwert einer Folge

Definition

Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge a_n , $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wenn $(a_n - a)$ Nullfolge ist.

Für $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0, \quad b \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad a_n > 0, \quad a > 0$$

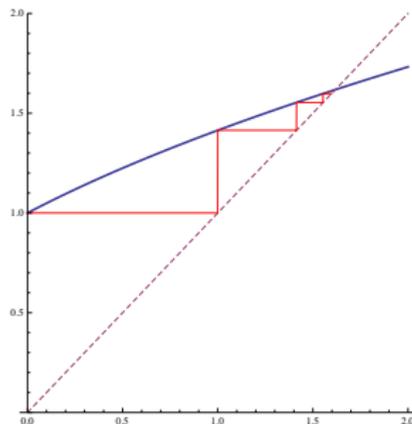
Konvergente und divergente Folgen

- Eine Folge heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert hat.
- Eine Folge, die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**.
- Von einer reellwertigen Folge, die keinen Grenzwert hat, sagen wir
 - sie divergiere gegen $+\infty$, wenn
$$\forall S \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ a_n > S, \text{ und}$$
 - sie divergiere gegen $-\infty$, wenn
$$\forall S \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ a_n < S.$$
- Von sonstigen reellwertigen Folgen sagen wir auch, sie seien unbestimmt divergent.

Rekursiv definierte Folgen

- Aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion kann eine Folge über eine Rekursionsrelation $a_{n+1} = f(a_n, \dots, a_{n-k})$ zusammen mit Startwerten a_0, \dots, a_k definiert werden.
- Ein wichtiger Spezialfall ist die Fixpunktiteration: Für Funktionen $f : D \rightarrow D$, $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $|f(a) - f(b)| \leq q|a - b|$, $q \in (0; 1)$, konvergiert die Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ gegen die (eindeutige) Lösung von $x = f(x)$.

Beispiel: Iteriertes Wurzelziehen,
 $a_{n+1} = \sqrt{\alpha^2 + a_n}$, $a_0 = 0$.
Fixpunktgleichung $x = \sqrt{\alpha^2 + x} \Rightarrow$
 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 + 1}$.



Rekursiv definierte Folgen – II

Für Rekursionen der Form $a_{n+1} = \alpha_0 a_n + \dots + \alpha_k a_{n-k}$ ist der Ansatz $a_n \propto \lambda^n$ nützlich:

- Man löst $\lambda^{k+1} = \alpha_0 \lambda^k + \dots + \alpha_k$, um $k+1$ Lösungen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ zu finden.
- Da mit λ_i^n auch $a_n = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_{k+1} \lambda_{k+1}^n$ die Rekursion löst, können die $k+1$ Konstanten C_i aus den $k+1$ Startwerten bestimmt werden.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$\text{mit Lösung } a_n = \frac{(\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1})}{(\lambda_+ - \lambda_-)},$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$



FIBONACCI
(1170–1250)

Unendliche Reihen

Für eine Folge a_n definieren wir die Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

und die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S_N,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Ansonsten heißt die unendliche Reihe divergent.

Unendliche Reihen – II

Beispiele:

- Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ (sonst divergent) wegen

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

- während die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

wegen $S_{2N} > 1 + \frac{N}{2}$ divergiert.

Funktionen einer reellen Variablen

Wir betrachten Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Eine solche Funktion heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall x \in D f(x) \leq S$,
- **nach unten beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall x \in D f(x) \geq S$,
- **beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \forall x \in D |f(x)| \leq S$,
- **monoton wachsend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- **monoton fallend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Falls ferner $x \in D \Rightarrow -x \in D$ gilt, heißt eine Funktion

- **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$,
- **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$.

Falls $x \in D \Rightarrow (x + p) \in D$ und $f(x + p) = f(x)$ gilt, heißt die Funktion **periodisch** mit Periode p .

Elementare Funktionen

$f(x) \equiv y$	D	W	$f^{-1}(y) \equiv x$
$x^\alpha, \alpha > 0$	$[0; \infty)$	$[0; \infty)$	$y^{1/\alpha}$
$x^\alpha, \alpha < 0$	$(0; \infty)$	$(0; \infty)$	$y^{1/\alpha}$
e^x	\mathbb{R}	$(0; \infty)$	$\log y$
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[-1; 1]$	$\arcsin y$
$\cos x$	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$	$\arccos y$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$	\mathbb{R}	$\arctan y$
$\cot x$	$(0; \pi)$	\mathbb{R}	$\operatorname{arccot} y$
$\sinh x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\operatorname{arsinh} y$
$\cosh x$	$[0; \infty)$	$[1; \infty)$	$\operatorname{arcosh} y$

Die Hyperbelfunktionen

Analog zu den trigonometrischen Funktionen

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

definiert man die Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

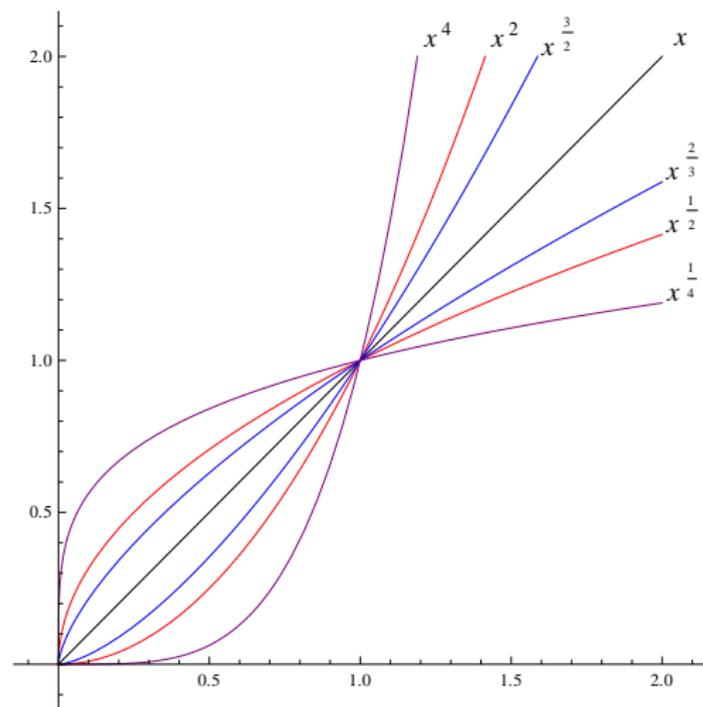
(und entsprechend $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$).

Die Hyperbelfunktionen genügen der Identität

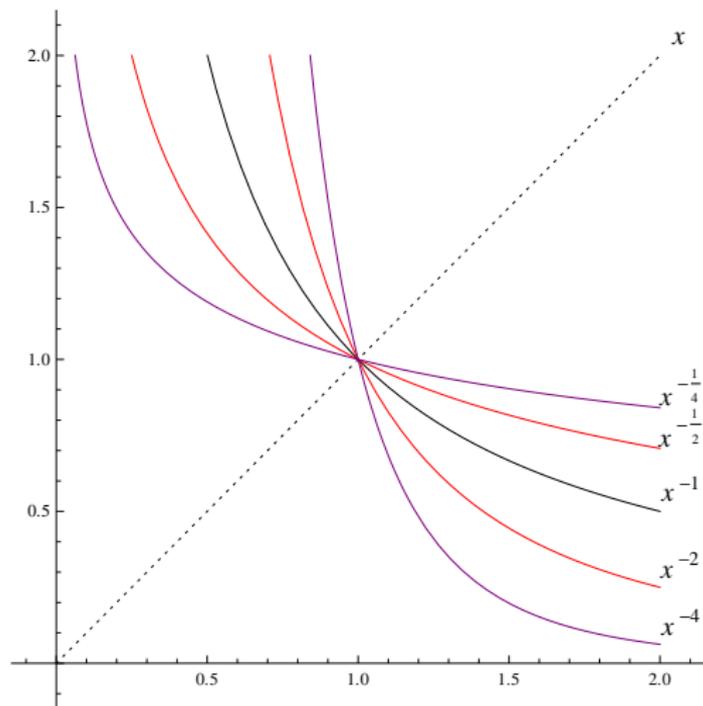
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

welche eine Hyperbel anstatt eines Kreises beschreibt.

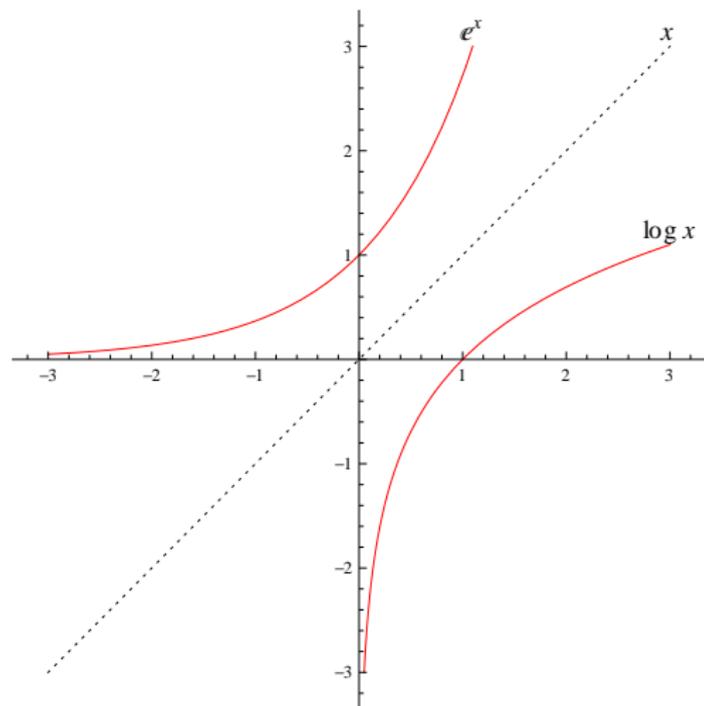
Elementare Funktionen als Graphen



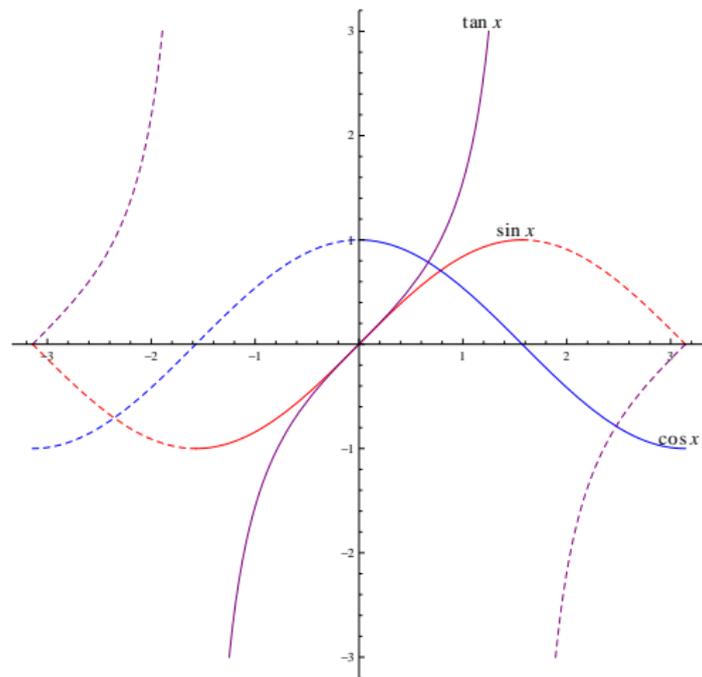
Elementare Funktionen als Graphen



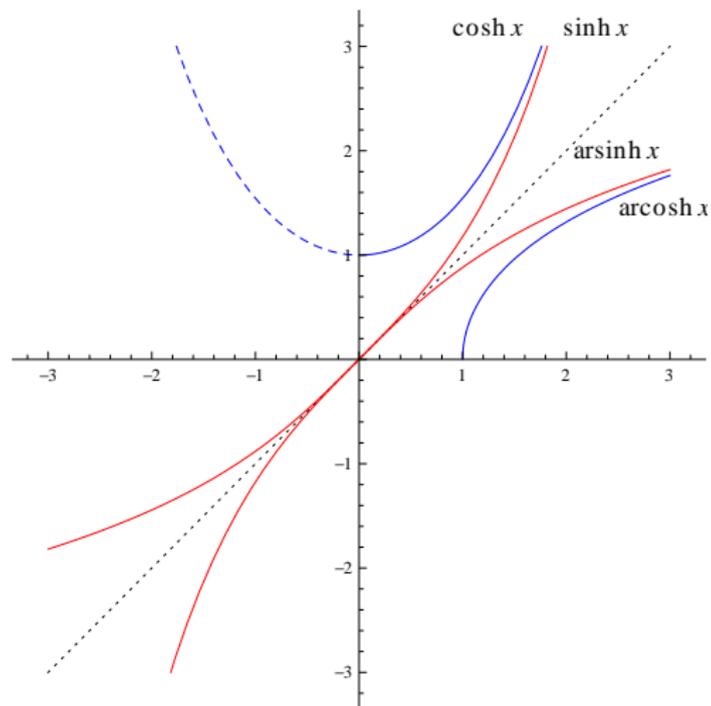
Elementare Funktionen als Graphen



Elementare Funktionen als Graphen



Elementare Funktionen als Graphen



Definition

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (folgen-)stetig an der Stelle $a \in D$, wenn für **alle** Folgen a_n mit $a_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

Eine Funktion, die an allen $a \in D$ stetig ist, nennen wir auch stetig auf D .

Für stetige Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$, sind auch

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$,
- $f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x)$,
- $h \circ f : x \mapsto h(f(x))$,
- für $g(x) \neq 0$, $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$,

stetig.

Stetige Funktionen – II

- Die elementaren Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.
- Ein Beispiel für eine nicht-stetige Funktion ist die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

die bei Null unstetig ist, oder die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

welche nirgends stetig ist.

Grenzwerte von Funktionen

- Wenn für eine Funktion die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ für **alle** Folgen a_n mit $a_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ übereinstimmen, definieren wir den Grenzwert der Funktion als

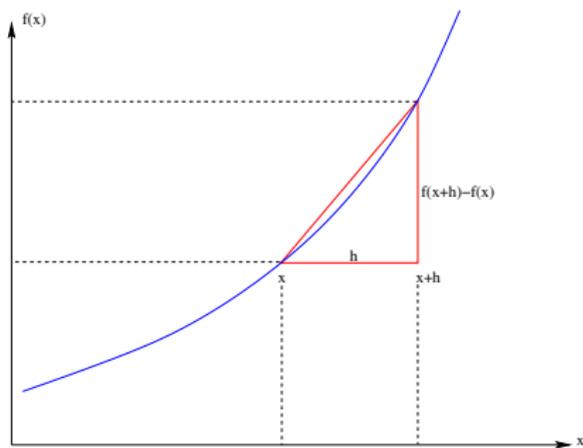
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

- Für stetiges f gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Ein rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ lässt sich definieren, falls die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ für alle Folgen a_n mit $a_n \in D$, $a_n > a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ übereinstimmen.
- Entsprechend kann man einen linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ definieren.

Definition

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $a \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv f'(a)$ existiert. Dieser heißt die Ableitung von f an der Stelle a .

- Oft schreibt man auch $f'(x) = \frac{df}{dx}$, wobei der Differentialquotient den Grenzwert des Differenzenquotienten symbolisiert.
- Eine differenzierbare Funktion ist auch stetig.



Differenzierbarkeit

Beispiel: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{x^n - y^n}{x - y} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n - (x - h)^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(x^n - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-h)^k x^{n-k} \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-h)^{k-1} x^{n-k} \\&= \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1} \\&= nx^{n-1}\end{aligned}$$

- Die Ableitung von f definiert wieder eine Funktion $f' : D' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ mit $D' \subseteq D$.
- Die Ableitung f'' von f' heißt die zweite Ableitung von f . Für die dritte und höhere Ableitungen schreiben wir auch $f^{(n)} = \frac{d}{dx} f^{(n-1)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.
- Die elementaren Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich (z.T. mit Ausnahme der Randpunkte) auch differenzierbar.
- Ein Beispiel für eine stetige, nicht-differenzierbare Funktion ist die Betragsfunktion $|x|$, die bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Differentiationsregeln – Summen und Produkte

Wenn $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar sind, so gelten die Summenregel

$$\frac{d}{dx}(f + g) = f'(x) + g'(x)$$

sowie die Produktregel

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Differentiationsregeln – Verkettungen und Umkehrungen

- Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar ist, und $g : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x)$ differenzierbar ist, so gilt die Kettenregel

$$\frac{d}{dx}(g \circ f) = g'(f(x))f'(x).$$

- Wenn $f : D \rightarrow W$, $W \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv und an der Stelle x differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ ist, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$ an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt die Umkehrfunktionsregel

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Differentiationsregeln – Quotienten

- Aus der Produkt- und der Kettenregel folgt, dass wenn $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x mit $g(x) \neq 0$ differenzierbar sind, die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

gilt.

- Für Quotienten $f(x)/g(x)$ mit $f(x) = g(x) = 0$ gilt die Regel von de l'Hôpital,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$



GUILLAUME DE L'HÔPITAL
(1661–1704)

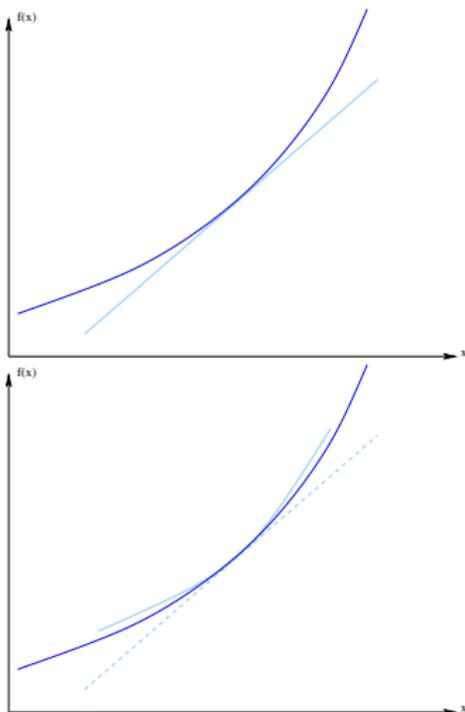
Taylor-Entwicklung

- Tangente nähert differenzierbare Funktion nahe Aufpunkt an:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{R(x)}_{\rightarrow 0, x \rightarrow x_0}$$

- Bessere Näherung (für hinreichend oft differenzierbares f) durch Polynome (Taylor-Entwicklung):

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \underbrace{R_n(x)}_{\rightarrow 0, x \rightarrow x_0}$$



Taylor-Entwicklung – II

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, spricht man von einer reell analytischen Funktion, die durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$



BROOK TAYLOR
(1685–1731)

Beispiele:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

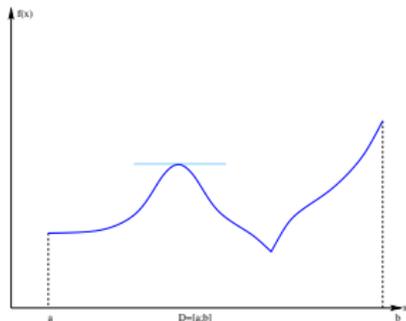
Extrema von Funktionen

Definition

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein lokales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ bei x_0 , wenn $\exists \epsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) f(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x_0)$.

Gilt sogar $\forall x \in D f(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x_0)$, heißt x_0 globales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$.

- Der Überbegriff für Maximum und Minimum ist Extremum.
- Es gilt: Ein Extremum x_0
 - liegt entweder auf dem Rand von D , oder
 - f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, oder
 - $f'(x_0) = 0$.



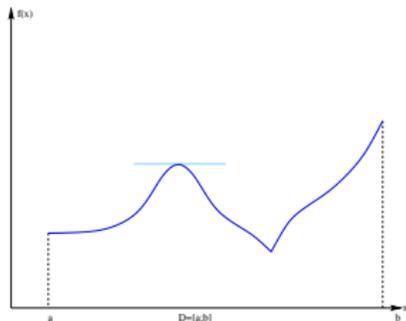
Extrema von Funktionen

Definition

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein lokales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ bei x_0 , wenn $\exists \epsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) f(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x_0)$.

Gilt sogar $\forall x \in D f(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x_0)$, heißt x_0 globales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$.

- Der Überbegriff für Maximum und Minimum ist Extremum.
- Wenn $f'(x_0) = 0$, so ist x_0
 - für $f''(x_0) > 0$ ein Minimum und
 - für $f''(x_0) < 0$ ein Maximum;
 - bei $f''(x_0) = 0$ entweder ein Sattelpunkt, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, oder es müssen höhere Ableitungen betrachtet werden.



Asymptotisches Verhalten

- Wenn für alle Folgen a_n , die nach $\pm\infty$ divergieren, derselbe Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ existiert, definieren wir

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

als den Grenzwert von f für $x \rightarrow \pm\infty$.

- Im Übrigen sind folgende Notationen zur Beschreibung des Verhaltens einer Funktion in der Umgebung einer Stelle a üblich:

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \quad \Leftrightarrow \quad \exists C > 0 \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Definition

Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F auf D differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ ist.

- Wenn F Stammfunktion von f ist, so auch $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Man schreibt

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

für die Stammfunktion von f (unbestimmtes Integral).

Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
e^x	e^x
$\log x$	$x \log x - x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Integration – Bestimmtes Integral

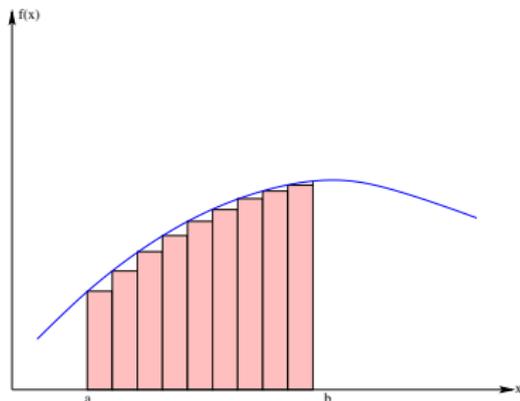
Wir definieren das bestimmte (Riemann-)Integral als Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe von Stufensummen,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

wenn dieser Limes unabhängig von der gewählten Zerlegung x_i ($a = x_0 < \dots < x_n = b$) ist.



BERNHARD RIEMANN
(1826–1866)



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F = \int f(x) dx$, gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Plausibilitätsbeweis:

- Intuitiv ist $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ verständlich, da $f(x)$ angibt, wie schnell die Fläche unter dem Graphen wächst.
- Algebraisch nutzt man $f(t) = F'(t)$ und nähert $F'(t)h = F(t+h) - F(t)$, um die Stufensumme ($x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$) in eine Teleskopsumme zu verwandeln, wobei die Näherung im Limes $h \rightarrow 0$ exakt wird.

Integrationsregeln – Summen und Produkte

Für integrierbare Funktionen f, g und Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int (c \cdot f(x)) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

Aus der Produktregel für die Ableitung folgt, dass für differenzierbare Funktionen f, g die Regel zur partiellen Integration,

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx,$$

gilt.

Integrationsregeln – Substitution

Aus der Kettenregel für die Ableitung folgt, dass für differenzierbare Funktionen f, g mit f injektiv die Identität

$$\int g(z) \, dz = \int g(f(x))f'(x) \, dx$$

mit $z = f(x)$ und $dz = f'(x) \, dx$ gilt.

Für bestimmte Integrale müssen auch die Grenzen transformiert werden:

$$\int_a^b g(z) \, dz = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} g(f(x))f'(x) \, dx$$

bzw.

$$\int_a^b g(f(x))f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z) \, dz$$

Integrationsregeln – Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen lassen sich durch Partialbruchzerlegung integrieren:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{e_i} \int \frac{A_{ij}}{(x - y_i)^j} dx + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{d_i} \int \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + a_i x + b_i)^j} dx$$

wobei Paare komplex konjugierter Wurzeln von Q in der Form von (über \mathbb{R} irreduziblen) quadratischen Polynomen zusammengefasst werden.

Die Partialbrüche lassen sich alle elementar integrieren:

$$\int \frac{dx}{(x - y)^e} = \begin{cases} \log|x - y|, & e = 1, \\ -\frac{1}{(e-1)(x-y)^{e-1}}, & e \neq 1, \end{cases}$$

und entsprechende Formeln für quadratische Nenner.

Uneigentliche Integrale

- Wenn ein Grenzwert der Form

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

existiert, so schreiben wir hierfür auch

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx$$

und nennen dies ein uneigentliches Integral.

- Entsprechend definieren wir die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

Uneigentliche Integrale – II

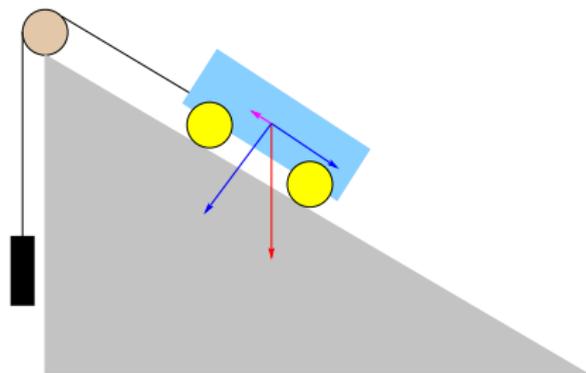
Wenn $f(x)$ für einen (oder beide) Randpunkte $x = a$ oder $x = b$ nicht definiert ist, definieren wir ferner uneigentliche Integrale der Form

$$\int_a^b f(x) \, dx \equiv \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \, dx$$
$$\int_a^b f(x) \, dx \equiv \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) \, dx$$

sofern die entsprechenden Grenzwerte existieren.

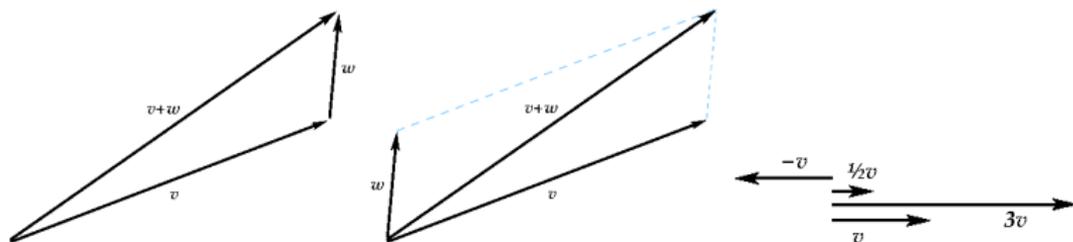
Beispiele:

- $\int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda e^{-x} \, dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (1 - e^{-\Lambda}) = 1$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_\lambda^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\lambda}) = 2$

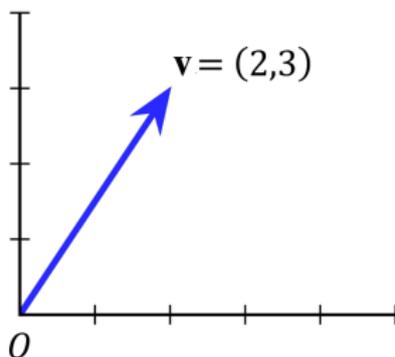


- Viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Kraft, ...) haben neben einem Betrag auch eine räumliche Richtung \leadsto Vektoren (*lat.* "Fahrer")
- Räumlich gerichtete Größen können als Pfeile dargestellt werden, deren Länge dem Betrag der Größe entspricht.

Vektoren



- Viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Kraft, ...) haben neben einem Betrag auch eine räumliche Richtung \leadsto Vektoren (*lat.* "Fahrer")
- Räumlich gerichtete Größen können als Pfeile dargestellt werden, deren Länge dem Betrag der Größe entspricht.
- Pfeile können mit einem reellen Betrag skaliert, sowie durch Aneinanderreihung zueinander addiert werden (Parallelogrammregel).



Durch Einführen von kartesischen Koordinaten identifizieren wir den Raum der zwei- bzw. dreidimensionalen Pfeile mit \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 , wobei das Skalieren bzw. die Addition in \mathbb{R}^n komponentenweise erfolgen:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Abstrakte Vektorräume

Eine mit zwei Verknüpfungen $+$: $V \times V \rightarrow V$ und \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C}) ausgestattete Menge V ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum, wenn die Verknüpfungen den folgenden Axiomen genügen:

$$\forall a, b, c \in V \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\exists 0 \in V \quad \forall a \in V \quad a + 0 = a$$

$$\forall a \in V \quad \exists (-a) \in V \quad a + (-a) = 0$$

$$\forall a, b \in V \quad a + b = b + a$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall a \in V \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall a \in V \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall a, b \in V \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$\forall a \in V \quad 1a = a$$

Linearkombinationen

- Aus einer endlichen Menge $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ von Vektoren $\mathbf{v}_k \in V$ können weitere Vektoren durch Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k \in V$$

erzeugt werden.

- Die Frage, wann ein Vektor als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden kann, führt auf die Definition: Eine Menge $W \subseteq V$ von Vektoren heißt linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k = 0$$

mit $\mathbf{v}_k \in W$ immer $\forall k \lambda_k = 0$ folgt.

Basis eines Vektorraumes

- Eine linear unabhängige Menge $B \subset V$, zu der kein weiterer Vektor hinzugefügt werden kann, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören, nennen wir eine Basis von V .
- Im \mathbb{R}^n haben wir als besonders wichtige Basis die kanonische Basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ mit

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

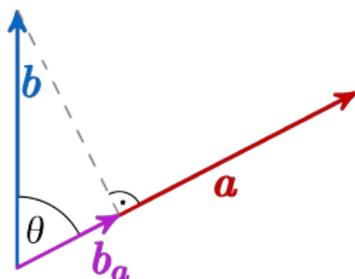
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

bzw. kompakter $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$ (wobei das Kronecker-Symbol durch $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0, j \neq i$ definiert ist).

Skalarprodukt

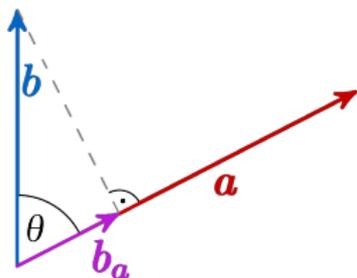


- Aus der Physik wissen wir, dass die verrichtete Arbeit das Produkt aus dem zurückgelegten Weg und der längs dieses Weges wirkenden Kraft ist.
- Definiert man dieses Produkt als Produkt der zugehörigen Vektoren, so erhält man das skalare Produkt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \vartheta$$

mit $|\mathbf{x}|$ dem Betrag des Vektors \mathbf{x} und ϑ dem Winkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} .

Skalarprodukt



- Man überprüft leicht, dass dieses Produkt die Eigenschaften

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \mathbf{a} \neq 0$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

besitzt, die wir zur Definition eines Skalarprodukts erheben.

Skalarprodukt – II

- Im \mathbb{R}^n ist das Skalarprodukt als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

definiert.

- Es gilt entsprechend

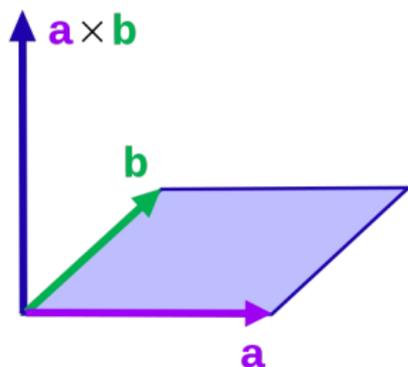
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

und

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

und diese Gleichungen können als Definitionen auf beliebige Vektorräume, auf denen ein Skalarprodukt definiert ist, erweitert werden.

Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

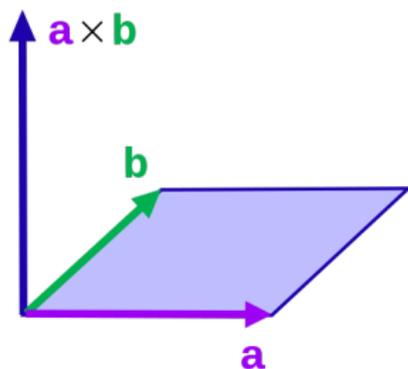


- Speziell im \mathbb{R}^3 lässt sich ein weiteres Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren: Es gibt genau eine Richtung, die senkrecht auf der von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene steht und mit \mathbf{a} und \mathbf{b} ein rechtshändiges System bildet. Ein Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mit dieser Richtung und dem Betrag

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \vartheta$$

(entspricht dem Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelograms) definiert das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Vektorprodukt im \mathbb{R}^3



- Man überprüft leicht, dass dieses Produkt die Eigenschaften

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

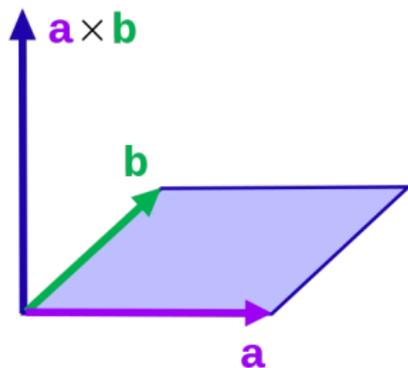
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

besitzt.

Vektorprodukt im \mathbb{R}^3



- In Komponenten gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

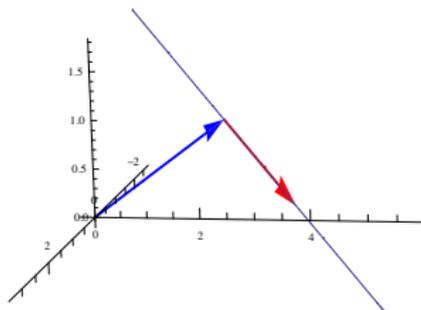
oder kompakt

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

mit dem Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ zyklisch,} \\ -1, & ijk \text{ antizyklisch,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analytische Geometrie des Raumes

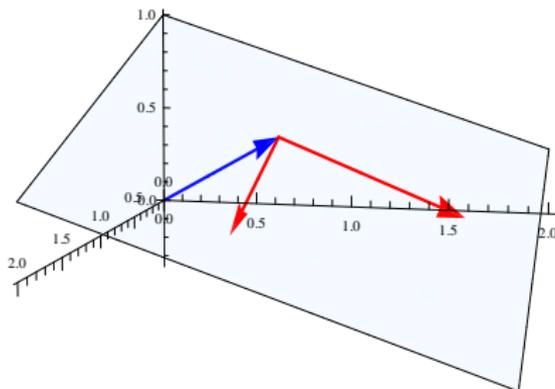


Gerade in Parameterform:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}$$

mit Stützpunkt \mathbf{p} und Richtungsvektor \mathbf{u}

Analytische Geometrie des Raumes

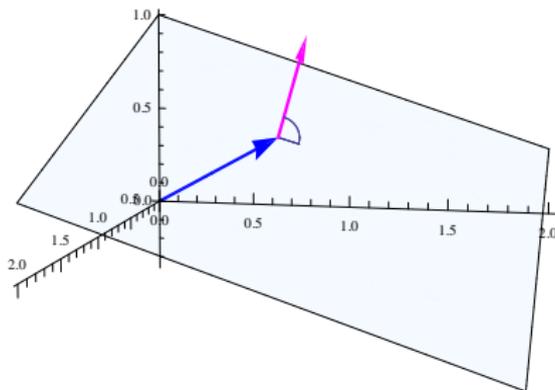


Ebene in Parameterform:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}$$

mit Stützpunkt \mathbf{p} und linear unabhängigen Richtungsvektoren \mathbf{u}, \mathbf{v}

Analytische Geometrie des Raumes



Ebene in Normalenform:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

mit Normalenvektor $\mathbf{n} \propto \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ und Stützpunkt \mathbf{p}

- Die Suche nach den Schnittmengen von Geraden und Ebenen untereinander (wie zuvor schon die Partialbruchzerlegung) führt auf lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Die geometrische Anschauung lehrt, dass diese Systeme entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Analytische Geometrie und lineare Gleichungssysteme

- Die Suche nach den Schnittmengen von Geraden und Ebenen untereinander (wie zuvor schon die Partialbruchzerlegung) führt auf lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Eine kurze Überlegung zeigt, dass die Reihenfolge der Gleichungen keine Rolle spielt, und dass wir jede Gleichung durch beidseitige Addition einer anderen Gleichung umformen können, ohne hierdurch die Lösungsmenge des Systems zu verändern.

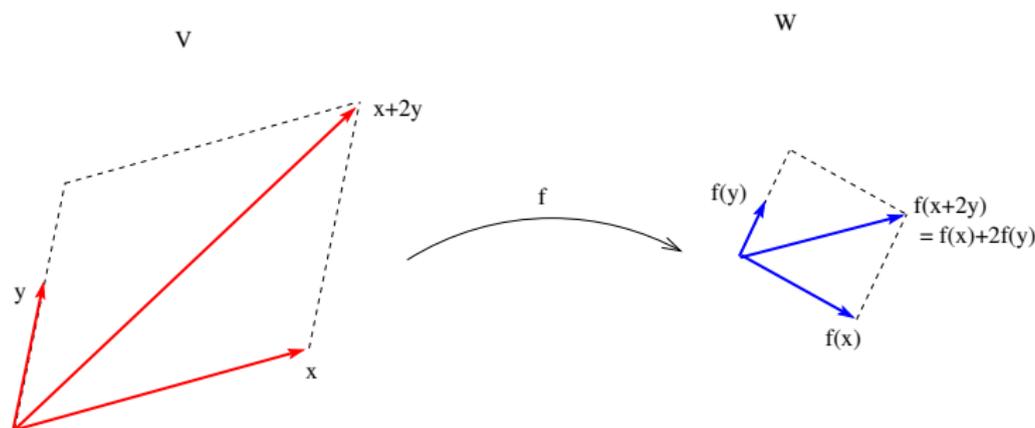
Lösen linearer Gleichungssysteme

Gaussches Eliminationsverfahren

Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$

- stelle, falls nötig, durch Vertauschen von Gleichungen $a_{jj} \neq 0$ sicher,
- eliminiere für jedes $i \in \{j + 1, \dots, m\}$ den Term mit Koeffizienten a_{ij} durch beidseitige Subtraktion des a_{ij}/a_{jj} -fachen der j -ten Gleichung von der i -ten Gleichung.
- Wenn hierbei eine Gleichung der Form $0 = c$ mit $c \neq 0$ auftritt, hat das System keine Lösung.
- Wenn hierbei am Ende weniger nichttriviale Gleichungen als Variablen auftreten, hat das System unendlich viele Lösungen, die durch die redundanten Variablen parametrisiert werden können.
- Ansonsten ist das System durch Rückwärtseinsetzen ausgehend von der letzten Gleichung eindeutig lösbar.

Lineare Abbildungen



Seien V und W Vektorräume. Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt lineare Abbildung, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y})$$

gilt.

Lineare Abbildungen und Matrizen

- Eine lineare Abbildung ist wegen

$$f\left(\sum_k \lambda_k \mathbf{v}_k\right) = \sum_k \lambda_k f(\mathbf{v}_k)$$

durch die Bilder der Vektoren einer Basis von V eindeutig bestimmt.

- Für lineare Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ können wir daher f mit der $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$$

identifizieren.

Addition von Matrizen

- Seien $f, g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist wegen
$$\eta g(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) + \xi f(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda(\eta g(\mathbf{a}) + \xi f(\mathbf{a})) + \mu(\eta g(\mathbf{b}) + \xi f(\mathbf{b}))$$
 auch ihre Linearkombination $(\eta g + \xi f) : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- Für $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit zugehörigen Matrizen A und B bildet $(\eta g + \xi f) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ den Basisvektor $e_j \in \mathbb{K}^n$ auf

$$(\eta g + \xi f)(e_j) = \sum_i \eta b_{ij} e_i + \sum_i \xi a_{ij} e_i = \sum_i (\eta b_{ij} + \xi a_{ij}) e_i$$

zu.

- Entsprechend definieren wir die Summe und skalare Multiplikation von Matrizen elementweise als

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Matrixmultiplikation

- Seien $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist wegen

$$g(f(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b})) = g(\lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b})) = \lambda g(f(\mathbf{a})) + \mu g(f(\mathbf{b}))$$

auch die Verkettung $g \circ f : U \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- Für $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r$ und $g : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit zugehörigen Matrizen A und B bildet $g \circ f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ den Basisvektor $\mathbf{e}_j \in \mathbb{K}^n$ auf

$$(g \circ f)(\mathbf{e}_j) = g(f(\mathbf{e}_j)) = \sum_i a_{ij} g(\mathbf{e}_i) = \sum_{i,k} a_{ij} b_{ki} \mathbf{e}_k$$

ab.

- Entsprechend definieren wir das Matrixprodukt als

$$(BA)_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij}$$

Rechnen mit Matrizen

- Mit diesen Definitionen gelten die Rechengesetze

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

- Die Summe $A + B$ ist nur definiert, wenn A und B dieselben Dimensionen haben.
- Das Produkt AB ist nur definiert, wenn A so viele Spalten wie B Zeilen hat.
- Wenn zwei Matrizen A und B in beide Richtungen miteinander multipliziert werden können, so gilt im Allgemeinen $AB \neq BA$.

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

- Unter der linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit zugehöriger Matrix A wird $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ nach

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_j x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_j x_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \mathbf{e}_i$$

abgebildet.

- Die Frage nach dem Urbild $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ eines Vektors $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ unter f entspricht also dem linearen Gleichungssystem mit Koeffizienten a_{ij} und rechter Seite b_i , das wir als

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

schreiben können, wenn wir Vektoren im \mathbb{K}^r als einspaltige Matrizen (Spaltenvektoren) auffassen.

Lineare Unabhängigkeit, Lösbarkeit, Bijektivität

- Für $m = n$ ist das lineare Gleichungssystem

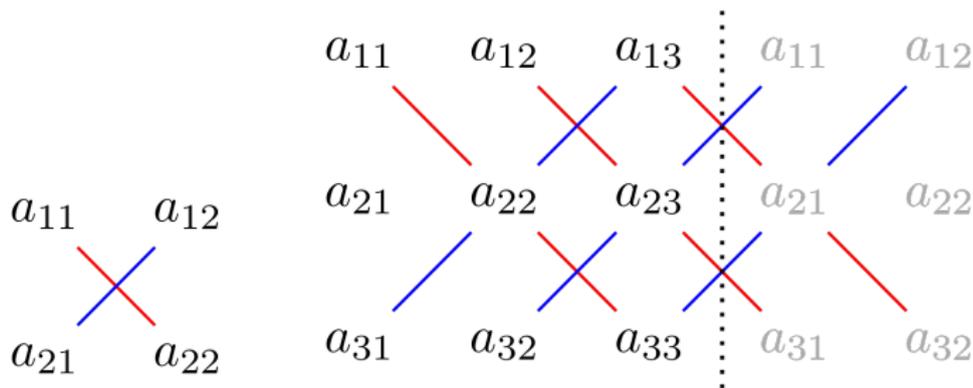
$$Ax = b$$

genau dann für beliebiges $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ lösbar, wenn die zu A gehörige lineare Abbildung bijektiv ist.

- Dies ist genau der Fall, wenn das Bild der kanonischen Basis $\{\mathbf{e}_j\}$ wieder eine Basis des \mathbb{K}^n bildet.
- Letzteres wird durch die n Spalten von A gegeben. Diese müssen also linear unabhängig sein.
- Das ist genau dann der Fall, wenn sie zusammen ein nichtverschwindendes n -dimensionales Volumen aufspannen.

- Das von den Spalten der $n \times n$ Matrix A aufgespannte n -dimensionale (orientierte) Volumen bezeichnen wir als die Determinante $\det A$ von A (oft schreibt man auch $|A|$ hierfür).
- Die Determinante hat folgende Eigenschaften:
 - Vertauschung von zwei Zeilen oder von zwei Spalten führt zu $\det A \mapsto -\det A$,
 - Addition von Zeilen oder Spalten lässt $\det A$ unverändert,
 - lineare Abhängigkeit der Spalten oder Zeilen impliziert $\det A = 0$,
 - es gilt $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
 - für $\det(A) \neq 0$ ist $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{K}^n$ lösbar.

Determinanten – II



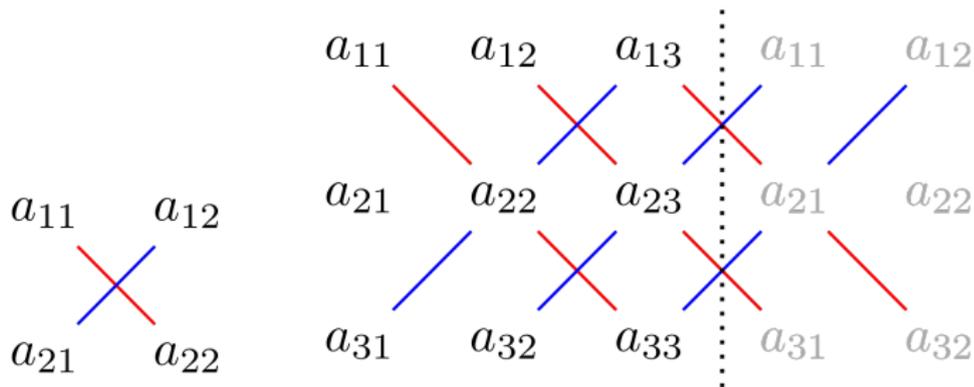
- Für $n = 2$ ist die Determinante einfach

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Für $n = 3$ gilt die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

Determinanten – II



- Für $n \geq 4$ benötigt die Berechnung einige allgemeinere Ideen (Permutationsgruppe) \leadsto Mathematikvorlesungen

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ lässt die Richtung eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ unverändert, wenn für die zugehörige $n \times n$ Matrix A

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

oder äquivalent

$$(A - \lambda\mathbb{1})\mathbf{v} = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und Nullen überall sonst bedeutet.

- λ heißt Eigenwert, \mathbf{v} Eigenvektor von A .

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Offensichtlich muss

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

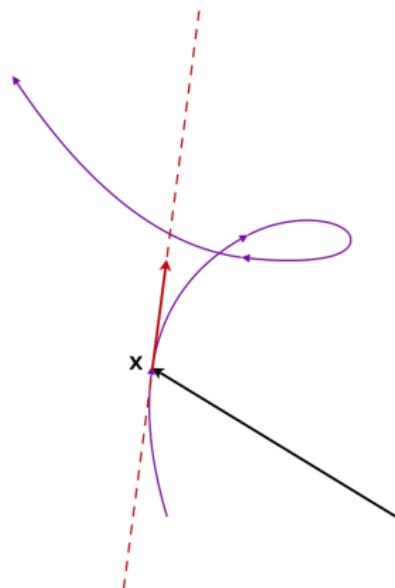
gelten, d.h. die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1})$$

von A sind die Eigenwerte von A .

- Es gilt: $\det(A) = \prod_i \lambda_i$, d.h. die Determinante von A ist das Produkt der (ggfs. komplexen) Eigenwerte von A .
- Für $\det(A) = 0$ existiert daher $\mathbf{v} \neq 0$ mit $A\mathbf{v} = 0$, und wenn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, so auch $A(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ für beliebiges $\xi \in \mathbb{K}$.

Vektorwertige Funktionen einer reellen Variablen



- Wir verallgemeinern die Parameterform der Geraden, um allgemeine Bewegungen von Teilchen darstellen zu können: $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \mathbf{x}(t)$.
- Ableitung erfolgt komponentenweise.
- Physikalisch gesehen ist

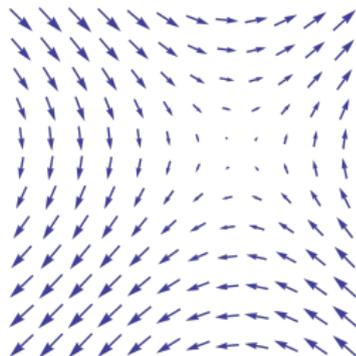
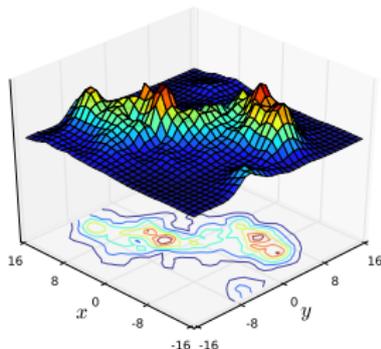
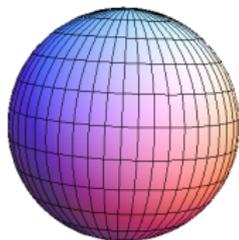
$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \text{die Geschwindigkeit,}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad \text{die Beschleunigung,}$$

wenn wir t als Zeit interpretieren.

- Geometrisch gesehen ist $\dot{\mathbf{x}}$ ein Tangentialvektor zur Kurve $\{\mathbf{x}(t) | t \in \mathbb{R}\}$.

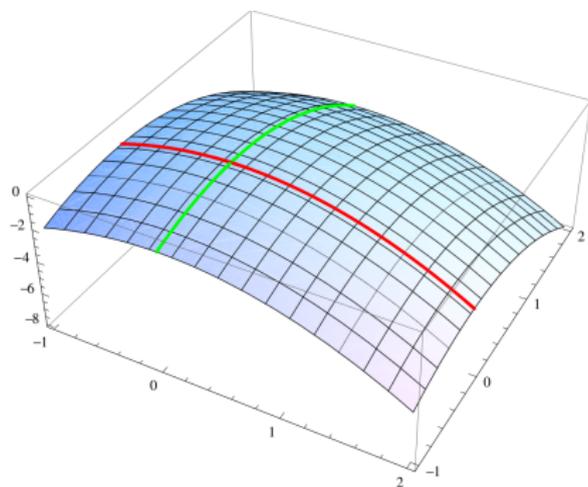
Funktionen mehrerer reeller Variablen



In einem weiteren Verallgemeinerungsschritt betrachten wir im Folgenden allgemeine Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Beispiele:

- eine parametrisierte Fläche $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die Höhenfunktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die dem Punkt $(x, y, h(x, y))$ auf der durch (x, y) parametrisierten Fläche seine Höhe $h(x, y)$ zuweist,
- das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das jedem Punkt im Raum die an diesem Punkt herrschende elektrische Feldstärke zuweist.

Partielle Ableitungen



Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nach x_i dadurch definiert, dass nach x_i differenziert wird, während alle anderen Komponenten von x konstant gehalten werden, d.h. z.B.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}.$$

Partielle Ableitungen – II

- Höhere partielle Ableitungen können sowohl nach derselben Variablen, z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

oder nach verschiedenen Variablen (gemischte Ableitung), z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

erfolgen.

- Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

wenn beide gemischten Ableitungen existieren und stetig sind.

Das totale Differential

- Für die Verkettung $(f \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt die verallgemeinerte Kettenregel

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

- Das totale Differential

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

gibt an, wie sich f verändert, wenn sich die x_i jeweils um einen infinitesimalen Betrag dx_i verändern; für endliche Änderungen gilt die Näherung

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Die Jacobi-Matrix

- Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt komponentenweise

$$df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

oder in Matrixschreibweise

$$d\mathbf{f} = J_f d\mathbf{x}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

- Für $m = n$ gibt die Determinante der Jacobi-Matrix (die Jacobi-Determinante) an, wie sich ein infinitesimales Volumen unter der Abbildung f jeweils lokal verändert.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Jacobi-Matrix ein Zeilenvektor,

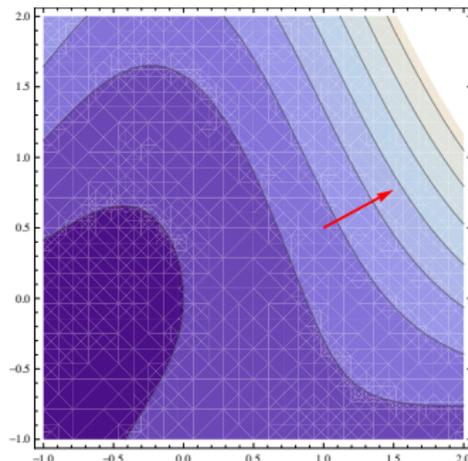
$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

und der zugehörige Spaltenvektor

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ist der Gradient von f , der in die Richtung der maximalen Zunahme von f unter Variation der x_i zeigt.

Der Gradient – II



- Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen $f = \text{const.}$..
- Damit f an einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ein Extremum hat, ist

$$\text{grad } f(x) = 0$$

eine notwendige (aber nicht ausreichende) Bedingung.

Der Nabla-Operator

Der Gradient lässt sich mit Hilfe des Nabla-Operators

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als

$$\text{grad } f = \nabla f$$

schreiben.

Wir können den Nabla-Operator wie einen Vektor behandeln, wenn wir folgende Rechenregeln beachten:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$



Die Nabla ist eine altorientalische Harfe, deren dreieckiger Form das ∇ -Symbol ähnelt.

Der Nabla-Operator

Der Gradient lässt sich mit Hilfe des Nabla-Operators

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als

$$\text{grad } f = \nabla f$$

schreiben.

Das totale Differential kann als

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$$

geschrieben werden.



Die Nabla ist eine altorientalische Harfe, deren dreieckiger Form das ∇ -Symbol ähnelt.

Divergenz und Rotation

- Für eine Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ können wir mit Hilfe des Nabla-Operators die Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$$

definieren.

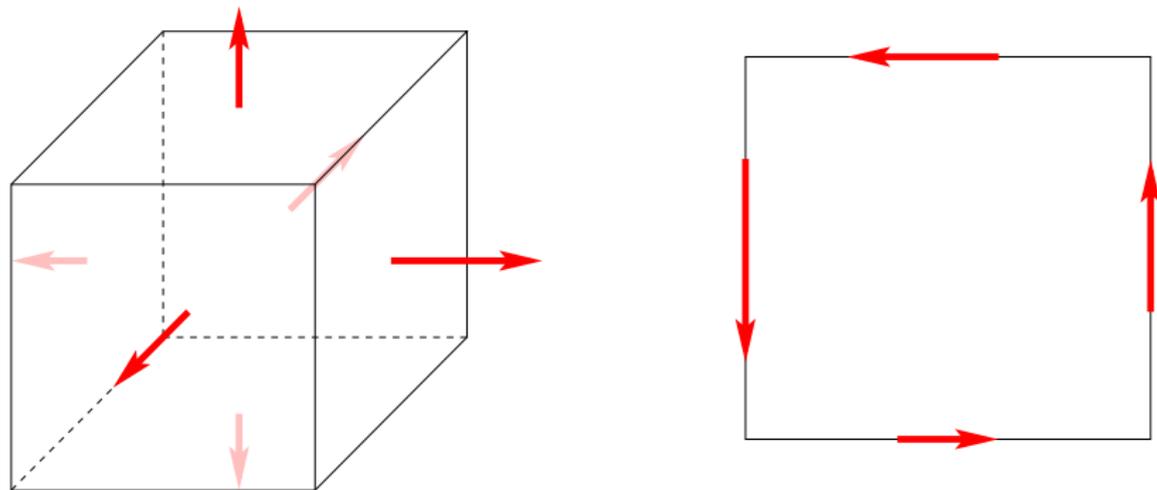
- Es gelten die wichtigen Beziehungen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

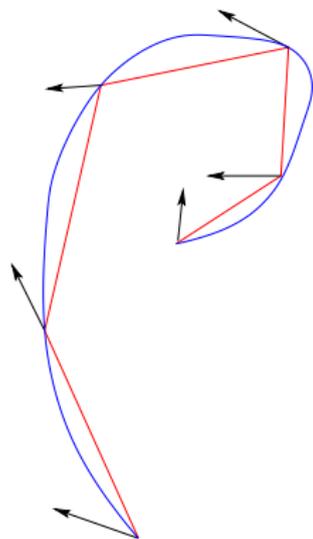
d.h. ein Gradient ist wirbelfrei und ein Wirbelfeld ist quellenfrei.

Divergenz und Rotation – II



Physikalisch gesehen ist die Divergenz ein Skalarfeld, das die Quellstärke des Vektorfeldes \mathbf{f} misst, und die Rotation ein Vektorfeld, das die Wirbelstärke des Vektorfeldes \mathbf{f} misst.

Kurvenintegrale

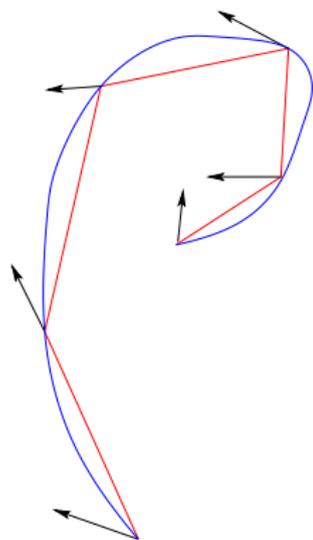


Wir definieren das Kurvenintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entlang der Kurve $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}(t) | t \in [a; b]\}$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a \wedge \mathbf{x}(b) = \mathbf{x}_b$, durch

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}(a + ih)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} h \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral bei umgekehrtem Durchlaufen der Kurve hat den gleichen Betrag und das entgegengesetzte Vorzeichen.

Kurvenintegrale

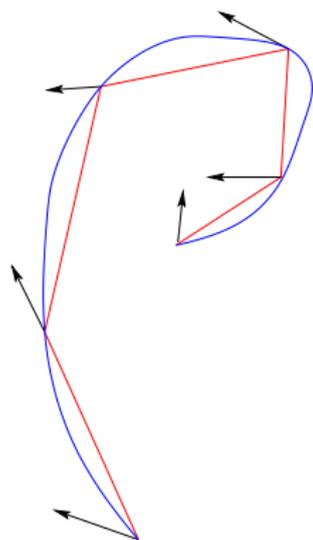


Wir definieren das Kurvenintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entlang der Kurve $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}(t) | t \in [a; b]\}$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a \wedge \mathbf{x}(b) = \mathbf{x}_b$, durch

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}(a + ih)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} h \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt\end{aligned}$$

Bei Aneinandersetzen zweier Kurven addieren sich die Kurvenintegrale.

Pfadunabhängigkeit des Kurvenintegrals



Wenn für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbf{f} = \nabla\phi$ gilt, heißt \mathbf{f} ein Gradientenfeld, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{x}(t)) dt \\ &= \phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a)\end{aligned}$$

so dass das Kurvenintegral nur von den Endpunkten von \mathcal{C} , jedoch nicht vom gewählten Pfad abhängt.

Pfadunabhängigkeit des Kurvenintegrals – II

- Insbesondere verschwindet für ein Gradientenfeld das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve mit $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$, da

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_a) - \phi(\mathbf{x}_a) = 0$$

- Im \mathbb{R}^3 gilt: \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld g.d.w. $\nabla \times \mathbf{f} = 0$.

Mehrfachintegrale

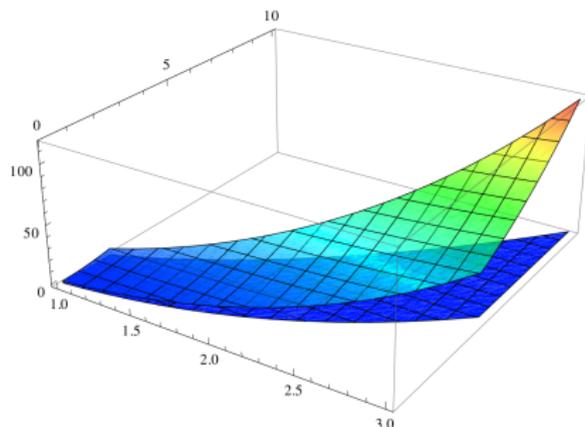
Wir definieren das Integral einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über die Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x \in [a; b] \wedge y \in [y_1(x); y_2(x)]\}$ über

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{F}} g \, dF &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) \, dy dx \\ &= \int_a^b (G(x, y_2(x)) - G(x, y_1(x))) \, dx\end{aligned}$$

mit G einer beliebigen Stammfunktion von g bezüglich y für alle x ,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = g(x, y).$$

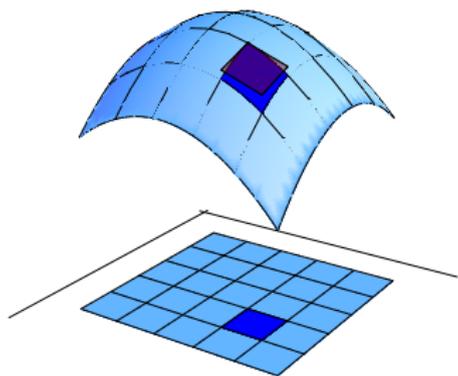
Mehrfachintegrale – II



Entsprechend definieren wir das Volumenintegral einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über das Volumen $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x \in [a; b] \wedge y \in [y_1(x); y_2(x)] \wedge z \in [z_1(x, y); z_2(x, y)]\}$ als

$$\iiint_{\mathcal{V}} g \, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(y,x)}^{z_2(y,x)} g(x, y, z) \, dz dy dx .$$

Oberflächenintegrale



Wir definieren das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ über eine Oberfläche

$\mathcal{F} = \{\mathbf{x}(u, v) \mid u \in [a; b] \wedge v \in [\alpha; \beta]\}$

durch

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{F} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \bigg|_{\substack{u = \frac{j}{m} \\ v = \frac{i}{n}}} \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{mn} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale – II

- Das Flächenintegral über die entgegengesetzt orientierte Fläche hat den gleichen Betrag und das entgegengesetzte Vorzeichen.
- Beim Aneinandersetzen von Flächen addieren sich die Flächenintegrale.
- Bei Flächenintegralen über geschlossene Oberflächen ist es Konvention, die nach außen weisende Normale zu wählen.

Die Sätze von Gauß und Stokes

Satz von Gauß

Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über die Oberfläche eines Volumens ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{F}.$$

Satz von Stokes

Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation,

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{F} = \int_{\partial \mathcal{F}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

Krummlinige Koordinaten

Wir führen krummlinige Koordinaten auf dem \mathbb{R}^2 ein, indem wir ihn als die Ebene $\{(x, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ in den \mathbb{R}^3 einbetten und durch $(u, v) \mapsto (x, y)$ parametrisieren. Dann ist das Flächenelement

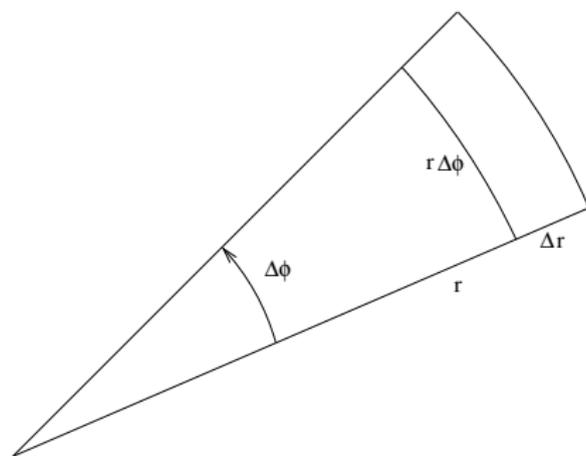
$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv = \mathbf{e}_z |\det(J)| du dv$$

mit J der Jacobi-Matrix der Funktion $(u, v) \mapsto (x, y)$, und wir können allgemein

$$dF = dx dy = |\det(J)| du dv$$

identifizieren.

Krummlinige Koordinaten



Beispiel: Ebene Polarkoordinaten (r, φ)

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(J) &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \\ &\leadsto dF = r dr d\varphi\end{aligned}$$

Krummlinige Koordinaten – II

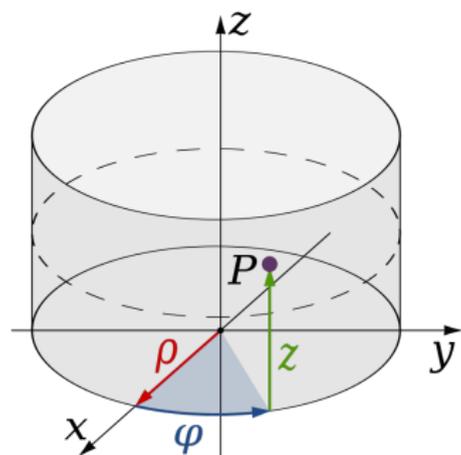
In gleicher Weise können wir auf dem \mathbb{R}^3 krummlinige Koordinaten einführen, indem wir ihn durch $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ parametrisieren.

Wir erhalten das Volumenelement

$$dV = |\det(J)| du dv dw$$

mit J der Jacobi-Matrix der Funktion $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$.

Krummlinige Koordinaten – II



Beispiel: Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)

$$x = \varrho \cos \varphi$$

$$y = \varrho \sin \varphi$$

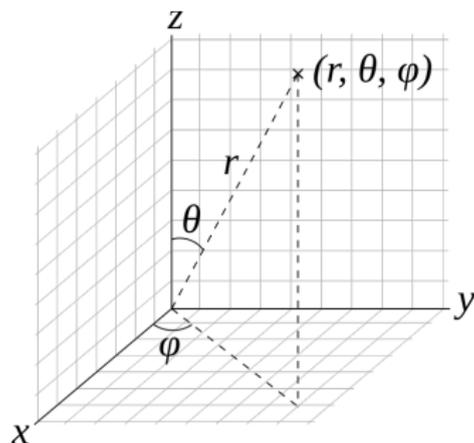
$$z = z$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho$$

$$\leadsto dV = \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Krummlinige Koordinaten – II



Beispiel: Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$J = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)r^2 \sin \vartheta = r^2 \sin \vartheta$$

$$\leadsto dV = r^2 \sin \vartheta \, dr d\vartheta d\varphi$$

- Jede physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet.
- Wir unterscheiden zwei Arten von Fehlern:
 - systematische Fehler, die z.B. durch fehlerhaft justierte Messapparaturen oder andere Unzulänglichkeiten des Messverfahrens entstehen,
 - statistische Fehler, die durch zufällige Einflüsse auf einzelne Messungen entstehen.
- Wenn eine Messung wiederholt wird, variieren die statistischen Fehler, die systematischen Fehler bleiben gleich.
- Im Folgenden behandeln wir nur die statistischen Fehler.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wenn wir eine Messung beliebig oft wiederholen könnten, würden wir eine Streuung der Messwerte beobachten, bei der Werte in verschiedenen Intervallen verschieden häufig auftauchen.

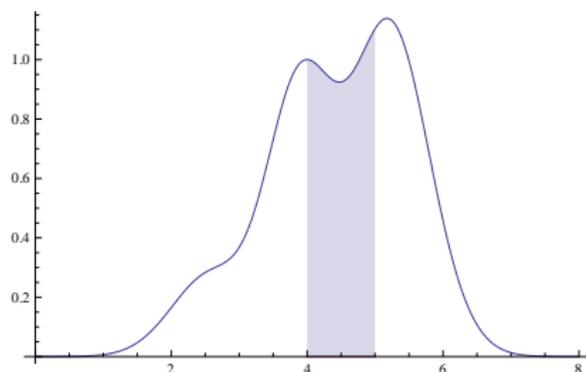
Gesetz der großen Zahlen

Bei N -facher Messung einer zufällig verteilten Größe gilt für die relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis E erzielt wird,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E)}{N} = P(E)$$

wobei $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit von E ist.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Für kontinuierlich verteilte Größen gilt

$$P(x \in [a; b]) = \int_a^b p(y) dy$$

mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Dichte) $p : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$, die $p(y) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1$ genügt.

Erwartungswert und Varianz

- Bei N -facher Wiederholung einer Messung ist der mittlere Messwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

und nach dem Gesetz der großen Zahlen erwarten wir hierfür im Limes $N \rightarrow \infty$

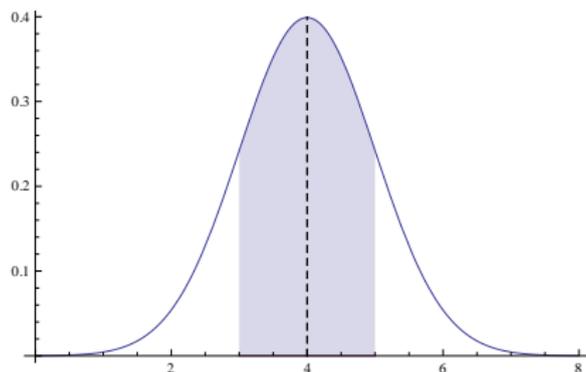
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

was den Erwartungswert definiert.

- Als ein Maß für die mittlere Streuung der Ergebnisse um den Erwartungswert definieren wir ferner die Varianz

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Die Normalverteilung



Eine besonders wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die sogenannte Normalverteilung (oder Gauss-Verteilung)

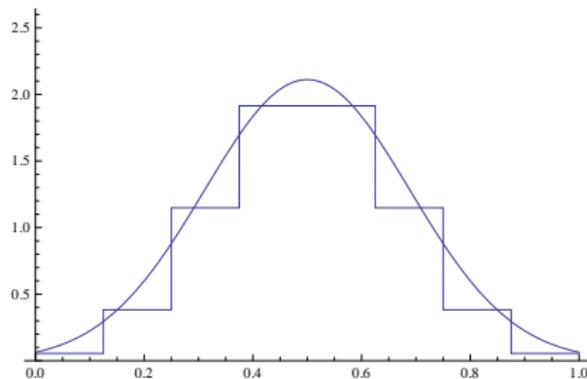
$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

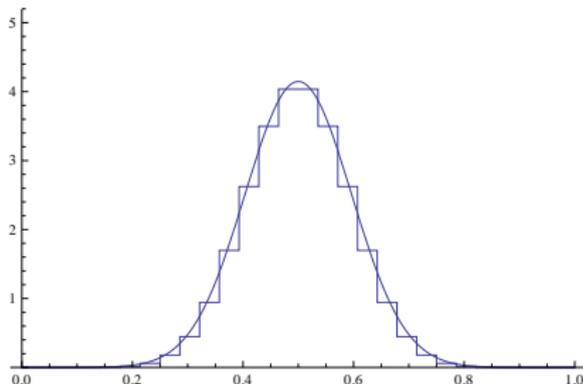
Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

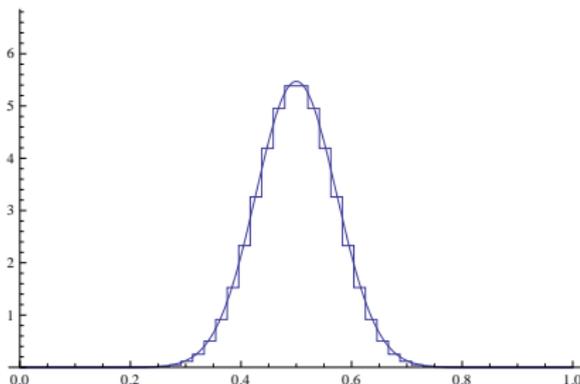
Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

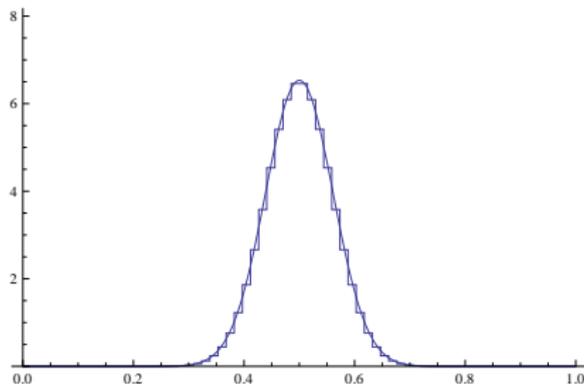
Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Statistische Schätzer

- Für eine endliche Messreihe x_1, \dots, x_N nehmen wir an, dass die einzelnen Messwerte unabhängig voneinander identisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind, und schätzen die unbekannt Parameter μ und σ durch

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \tilde{\mu})^2}$$

- Nach dem Zentralen Grenzwertsatz hat unser geschätzter Mittelwert einen mittleren Fehler von

$$\sigma_{\tilde{\mu}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

Für den Fehler einer Funktion $f(x, y)$ von unabhängig voneinander fehlerbehafteten Größen x, y gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{f(\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\tilde{\mu}_x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\tilde{\mu}_y}^2}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Physikalische Gesetze bestimmen zukünftige Zustände durch die momentane Veränderung physikalischer Größen in Abhängigkeit vom momentanen Zustand.
- Mathematisch lässt sich eine solche Beziehung durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

ausdrücken.

- Physikalische Gesetze sind in der Regel Differentialgleichungen 2. Ordnung ($n = 2$), gelegentlich auch 1. Ordnung ($n = 1$).

Gewöhnliche Differentialgleichungen – II

- Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichung durch n Anfangswertbedingungen $x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ ergänzen, die den Ausgangszustand beschreiben.
- Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ mit Ausgangsort $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und Ausgangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ als Anfangswerten.

Ein trivialer Fall

- Eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = f(t)$$

hat die Lösung

$$x(t) = \int f(t)dt + c$$

wobei die Integrationskonstante c durch die Anfangswertbedingung $x(0) = x_0$ bestimmt wird.

- Entsprechend können Differentialgleichungen beliebiger Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t)$$

durch n -faches Integrieren gelöst werden. Die n Integrationskonstanten sind durch die n Anfangswertbedingungen $x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}$ eindeutig bestimmt.

Die Wachstums-/Zerfallsgleichung

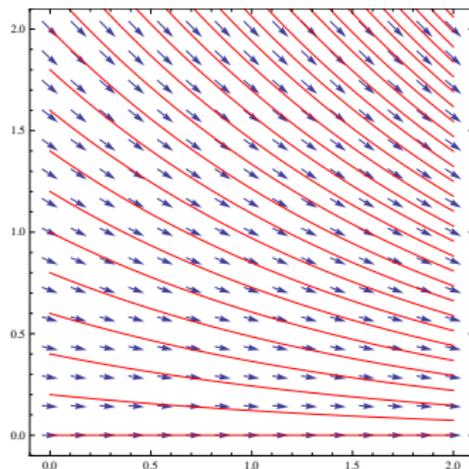
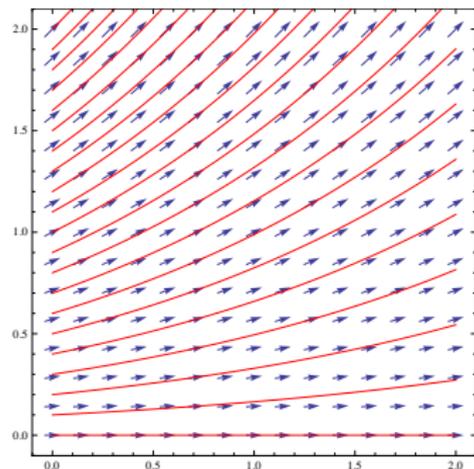
Einfachste nicht-triviale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)$$

beschreibt einen Prozess, in dem die Veränderung einer Größe proportional zu dieser Größe selbst ist.

- Für $\lambda > 0$: Wachstumsprozess (z.B. Bakterienkolonie)
- Für $\lambda < 0$: Zerfallsprozess (z.B. radioaktiver Zerfall)
- Lösung: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

Die Wachstums-/Zerfallsgleichung



Richtungsfeld: Das Vektorfeld $(1, \dot{x}(t))$ ist überall tangential zur Kurvenschar $(t, x(t))$ der Graphen der Lösungen

Die logistische Differentialgleichung

- Unbegrenzttes Wachstum ist unrealistisch – endliche Ressourcen beschränken Wachstumsprozesse.
- Die logistische Differentialgleichung (frz. *logis* = Lebensraum)

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) [\kappa - x(t)]$$

beschreibt einen durch eine endliche Kapazität κ beschränkten Wachstumsprozess.



PIERRE VERHULST
(1804–1849)

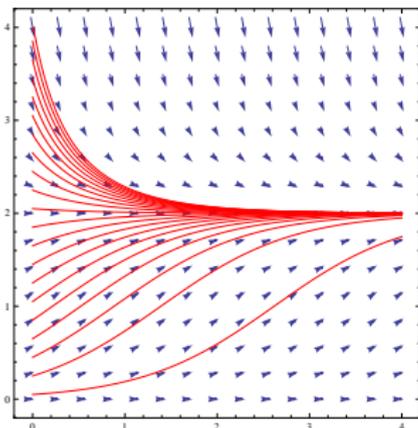
Die logistische Differentialgleichung

- Die logistische Differentialgleichung (frz. *logis* = Lebensraum)

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) [\kappa - x(t)]$$

beschreibt einen durch eine endliche Kapazität κ beschränkten Wachstumsprozess.

- Das Richtungsfeld zeigt, dass die Lösungskurven für $t \rightarrow \infty$ gegen $x(t) = \kappa$ streben
- Lösung: $x(t) = \frac{\kappa}{1 - (1 - \kappa/x_0)e^{-\kappa\lambda t}}$



Separation der Variablen

Eine Differentialgleichung der Form

$$f(x(t)) \frac{dx}{dt} = g(t)$$

heißt separabel und kann durch Integration auf die Form

$$F(x(t)) = G(t) + c$$

mit F , G Stammfunktionen von f , g gebracht werden. Die Integrationskonstante c wird durch die Anfangswertbedingung bestimmt.

Beispiele: Zerfallsgleichung, Logistische Gleichung

Exakte Differentialgleichungen

Die Beziehungen

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{ds} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

liefern uns eine Technik, um Differentialgleichungen der Form

$$u(x, t) \frac{dx}{dt} + v(x, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

(sog. exakte Differentialgleichungen) durch Überführen in die Form

$$\frac{df}{dt} = 0$$

mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v = \frac{\partial f}{\partial t}$ durch

$$f(x(t), t) = c$$

zu lösen, wobei die Integrationskonstante c durch die Anfangswertbedingung festgelegt wird.

Ungedämpfte Schwingungen

Wegen $\frac{d^2}{dt^2} \sin t = -\sin t$ und $\frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\cos t$ hat die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Lösungen der Form

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

wobei die Konstanten C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 = C_2, \dot{x}(0) = v_0 = C_1\omega$ festgelegt werden.

Wir können äquivalent auch die komplexe Lösung

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

betrachten – Real- und Imaginärteil sind reelle Lösungen.

Gedämpfte Schwingungen

Wenn wir der Schwingungsgleichung noch einen Reibungsterm hinzufügen, erhalten wir die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ($\gamma > 0$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\gamma \frac{dx}{dt} - \omega^2 x$$

Wenn wir für die Lösung den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ machen, so erhalten wir für λ die Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, & \gamma \geq \omega \\ -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & \gamma < \omega \end{cases}$$

Gedämpfte Schwingungen – II

Wir unterscheiden drei Fälle:

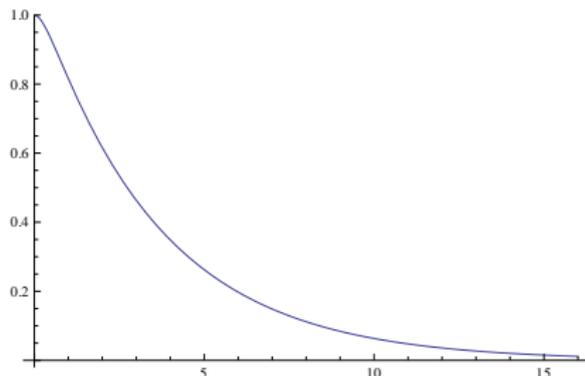
- ① $\gamma > \omega$: Kriechfall,

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

- ② $\gamma = \omega$: aperiodischer Grenzfall, $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

- ③ $\gamma < \omega$: Schwingfall,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) \right)$$



Gedämpfte Schwingungen – II

Wir unterscheiden drei Fälle:

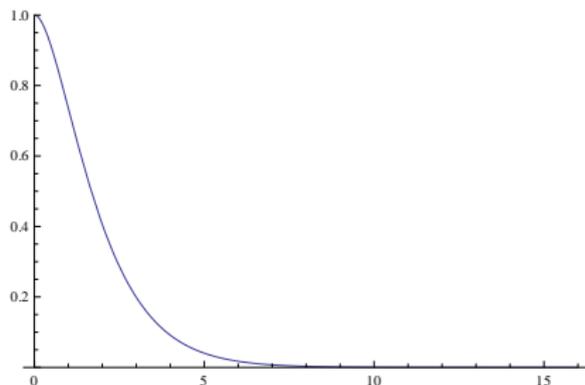
- 1 $\gamma > \omega$: Kriechfall,

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

- 2 $\gamma = \omega$: aperiodischer Grenzfall, $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

- 3 $\gamma < \omega$: Schwingfall,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) \right)$$



Gedämpfte Schwingungen – II

Wir unterscheiden drei Fälle:

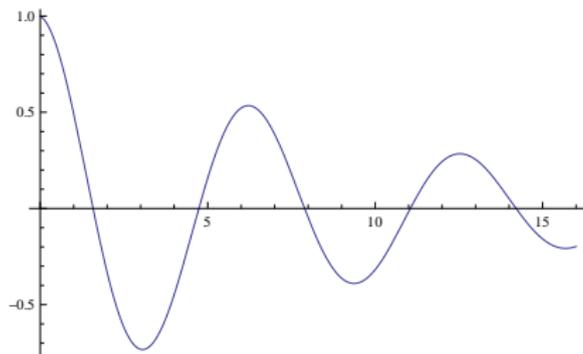
1 $\gamma > \omega$: Kriechfall,

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

2 $\gamma = \omega$: aperiodischer Grenzfall, $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

3 $\gamma < \omega$: Schwingfall,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) \right)$$



Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

- Wir unterscheiden homogene lineare Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{d^k x}{dt^k} = 0$$

von inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{d^k x}{dt^k} = f(t)$$

- Wenn $x_p(t)$ irgendeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist und $x_h(t)$ die zugehörige homogene Differentialgleichung löst, so ist auch $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- Wir nennen $x_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Wir betrachten nun erzwungene Schwingungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A e^{i\omega_f t}$$

wobei wir unsere Gleichung nun komplexifiziert haben.
Der Ansatz $x_p(t) = B e^{i\omega_f t}$ liefert

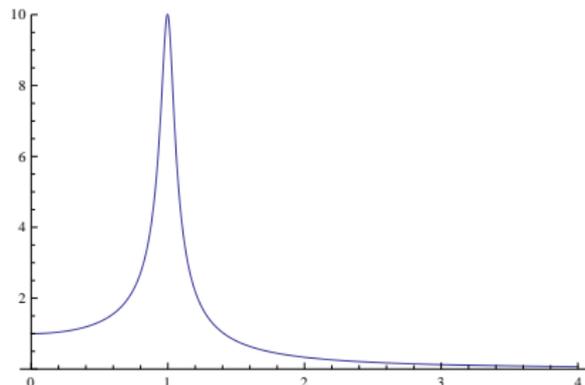
$$(-\omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f + \omega^2)B = A$$

und für $\gamma > 0$ erhalten wir

$$B = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f}$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t} + x_h(t)$, wobei $x_h(t)$ für großes t mit $e^{-\gamma t}$ absterbt.

Erzwungene Schwingungen und Resonanz



Folgerung: Resonanz – für kleines γ und $\omega_f = \omega$ wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung groß.

- Wiederholt und vertieft:
 - Rechnen in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} ; Potenzen und Logarithmen
 - Folgen und Grenzwerte
 - Differential- und Integralrechnung; Ketten- und Produktregel; Substitution, partielle Integration, Partialbruchzerlegung
 - Vektoralgebra und analytische Geometrie
 - Grundkonzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Neu gelernt oder vertieft:
 - Sprache und Begriffe der Logik und Mengenlehre
 - Rechnen in \mathbb{C} , Fundamentalsatz der Algebra, Eulersche Formel
 - Prinzip der vollständigen Induktion, Rekursion, Reihen
 - Taylor-Entwicklung, Regel von de l'Hôpital
 - Lineare Abbildungen und Matrizen
 - Krummlinige Koordinatensysteme
- Neu gelernt:
 - Partielle Ableitungen, Nabla-Operator
 - Determinanten, Eigenwerte
- Erste Einblicke:
 - Vektoranalysis im \mathbb{R}^3
 - Fehlerrechnung
 - Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Viel Spaß und Erfolg
im Studium!**