Zusammenfassung zum Thema Vektor- und Matrizenrechnung

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Grundbegriffe der Linearen Algebra
Viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Kraft, ...) haben neben einem Betrag auch eine räumliche Richtung (Vektoren, von lat. *vector* "Fahrer") und können als Pfeile dargestellt werden, deren Länge dem Betrag der Größe entspricht. Pfeile im Anschauungsraum können mit einem reellen Betrag skaliert, sowie durch Aneinanderreihung zueinander addiert werden (Parallelogrammregel). Durch Einführen von kartesischen Koordinaten identifizieren wir den Anschauungsraum der zwei- bzw. dreidimensionalen Pfeile mit $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, wobei das Skalieren bzw. die Addition in $\mathbb{R}^n$ komponentenweise erfolgen:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

In einem weiteren Abstraktionsschritt definieren wir einen einen rellen bzw. komplexen Vektorraum als eine mit zwei Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) ausgestattete Menge V, wenn die Verknüpfungen den folgenden Axiomen genügen:

$$\begin{array}{ll}
\forall a, b, c \in V \ (a + b) + c = a + (b + c) & \exists 0 \in V \ \forall a \in V \ a + 0 = a \\
\forall a \in V \ \exists (-a) \in V \ a + (-a) = 0 & \forall a, b \in V \ a + b = b + a \\
\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \forall a \in V \ \lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \forall a \in V \ (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a \\
\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall a, b \in V \ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b & \forall a \in V \ 1a = a
\end{array}$$

Aus einer endlichen Menge $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ von Vektoren $\boldsymbol{v}_k \in V$ können weitere Vektoren durch Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{v}_k \in V$$

erzeugt werden. Die Frage, wann ein Vektor als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden kann, führt auf die Definition: Eine Menge $W \subseteq V$ von Vektoren heißt linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{v}_k = 0$$

mit $\boldsymbol{v}_k \in W$ immer $\forall k \ \lambda_k = 0$ folgt.
Eine linear unabhängige Menge $B \subset V$, zu der kein weiterer Vektor hinzugefügt werden kann, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören, nennen wir eine Basis von V. Im $\mathbb{R}^n$ haben wir als besonders wichtige Basis die kanonische Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ mit

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \vdots \ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

bzw. kompakter $(\boldsymbol{e}_i)_j = \delta_{ij}$ (wobei das Kronecker-Symbol durch $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$, $j \neq i$ definiert ist).

Skalarprodukte
Aus der Physik wissen wir, dass die verrichtete Arbeit das Produkt aus dem zurückgelegten Weg und der längs dieses Weges wirkenden Komponente der Kraft ist. Definiert man dieses Produkt als Produkt der zugehörigen Vektoren, so erhält man das skalare Produkt

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\vartheta$$

mit $|\boldsymbol{x}|$ dem Betrag des Vektors $\boldsymbol{x}$ und ϑ dem Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Man überprüft leicht, dass dieses Produkt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &> 0, \quad \boldsymbol{a}\neq 0 \\ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \qquad \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) &= \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

besitzt, die wir zur Definition eines Skalarprodukts erheben. Im $\mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt durch

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

definiert (und man überzeugt sich leicht, dass dieses für $n = 2$ und $n = 3$ mit der anschaulichen Idee übereinstimmt). Es gilt entsprechend

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

und

$$\cos\vartheta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

und diese Gleichungen können als Definitionen auf beliebige Vektorräume, auf denen ein Skalarprodukt definiert ist, erweitert werden.

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$
Speziell im $\mathbb{R}^3$ lässt sich ein weiteres Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ definieren: Es gibt genau eine Richtung, die senkrecht auf der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene steht und mit $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ein rechtshändiges System bildet. Ein Vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ mit dieser Richtung und dem Betrag

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\vartheta$$

(entspricht dem Flächeninhalt des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelograms) definiert das Vektorprodukt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$. Man überprüft leicht, dass dieses Produkt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} & \qquad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0 \\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} & \qquad \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) &= \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

besitzt. In Komponenten gilt

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

oder kompakt

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

mit dem Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ zyklisch } (123,\ 231,\ 312), \\ -1, & ijk \text{ antizyklisch } (321,\ 132,\ 213), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analytische Geometrie des Raumes

- Gerade in Parameterform:
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \lambda \boldsymbol{u}$$
mit Stützpunkt $\boldsymbol{p}$ und Richtungsvektor $\boldsymbol{u}$.
- Ebene in Parameterform:
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2$$
mit Stützpunkt $\boldsymbol{p}$ und linear unabhängigen Richtungsvektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$.
- Ebene in Normalenform:
$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = c$$
mit Normalenvektor $\boldsymbol{n} \propto \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ und Abstandskonstante $c = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}$.

Lineare Gleichungssysteme
Die Suche nach den Schnittmengen von Geraden und Ebenen untereinander führt (wie bereits zuvor die Partialbruchzerlegung) auf lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die geometrische Anschauung lehrt, dass diese Systeme entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Eine kurze Überlegung zeigt, dass die Reihenfolge der Gleichungen keine Rolle spielt, und dass wir jede Gleichung durch beidseitige Addition einer anderen Gleichung umformen können, ohne hierdurch die Lösungsmenge des Systems zu verändern.
Wir können daher lineare Gleichungssysteme mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren lösen: Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$

- stelle, falls nötig, durch Vertauschen von Gleichungen $a_{jj} \neq 0$ sicher,
- eliminiere für jedes $i \in \{j+1, \dots, m\}$ den Term mit Koeffizienten a_{ij} durch beidseitige Subtraktion des a_{ij}/a_{jj}-fachen der j-ten Gleichung von der i-ten Gleichung.

Wenn hierbei

- eine Gleichung der Form $0 = c$ mit $c \neq 0$ auftritt, hat das System keine Lösung,
- am Ende weniger nichttriviale Gleichungen als Variablen auftreten, hat das System unendlich viele Lösungen, die durch die redundanten Variablen parametrisiert werden können.

Ansonsten ist das System durch Rückwärtseinsetzen ausgehend von der letzten Gleichung (die nun auf die Form $ax_n = b$ reduziert ist) eindeutig lösbar.

Lineare Abbildungen und Matrizen
Seien V und W Vektorräume. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung, falls für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$$f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y})$$
gilt. Eine lineare Abbildung ist wegen
$$f\left(\sum_k \lambda_k \boldsymbol{v}_k\right) = \sum_k \lambda_k f(\boldsymbol{v}_k)$$
durch die Bilder der Vektoren einer Basis von V eindeutig bestimmt.

Für lineare Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ können wir daher f mit der $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ identifizieren.
Seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist wegen

$$\eta g(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) + \xi f(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) = \lambda(\eta g(\boldsymbol{a}) + \xi f(\boldsymbol{a})) + \mu(\eta g(\boldsymbol{b}) + \xi f(\boldsymbol{b}))$$

auch ihre Linearkombination $(\eta g + \xi f) : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit zugehörigen Matrizen A und B bildet $(\eta g + \xi f) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ den Basisvektor $e_j \in \mathbb{K}^n$ auf

$$(\eta g + \xi f)(e_j) = \sum_{i=1}^m \eta b_{ij} e_i + \sum_{i=1}^m \xi a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^m (\eta b_{ij} + \xi a_{ij})\boldsymbol{e}_i$$

ab. Entsprechend definieren wir Summe und skalare Multiplikation von Matrizen elementweise als

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Seien $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist wegen

$$g(f(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b})) = g(\lambda f(\boldsymbol{a}) + \mu f(\boldsymbol{b})) = \lambda g(f(\boldsymbol{a})) + \mu g(f(\boldsymbol{b}))$$

auch die Verkettung $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung. Für $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ und $g : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^m$ mit zugehörigen Matrizen A und B bildet $g \circ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ den Basisvektor $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{K}^n$ auf

$$(g \circ f)(\boldsymbol{e}_j) = g(f(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_{i=1}^r a_{ij} g(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^r a_{ij} b_{ki} \boldsymbol{e}_k$$

ab. Entsprechend definieren wir das Matrixprodukt als

$$(BA)_{kj} = \sum_{i=1}^r b_{ki} a_{ij}$$

Mit diesen Definitionen gelten die Rechengesetze

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C & \qquad A + B &= B + A \\ (A + B)C &= AC + BC & A(B + C) &= AB + AC \\ A(BC) &= (AB)C \end{aligned}$$

Die Summe $A + B$ ist nur definiert, wenn A und B dieselben Dimensionen haben. Das Produkt AB ist nur definiert, wenn A soviele Spalten wie B Zeilen hat. Wenn zwei Matrizen A und B in beide Richtungen miteinander multipliziert werden können, so gilt im Allgemeinen $AB \neq BA$.
Unter der linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit zugehöriger Matrix A wird $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ nach

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i$$

abgebildet. Die Frage nach dem Urbild $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ eines Vektors $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$ unter f entspricht also dem linearen Gleichungssystem mit Koeffizienten a_{ij} und rechter Seite b_i, das wir als

$$Ax = b$$

schreiben können, wenn wir Vektoren im $\mathbb{K}^r$ als einspaltige Matrizen (Spaltenvektoren) auffassen.