

Zusammenfassung zum Thema Vektoranalysis

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Vektorwertige Funktionen einer reellen Variablen

Wir verallgemeinern die Parameterform der Geraden, um allgemeine Bewegungen von Teilchen darstellen zu können: $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$. Die Ableitung erfolgt komponentenweise. Physikalisch gesehen ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ die Geschwindigkeit, und $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ die Beschleunigung, wenn wir t als Zeit interpretieren. Geometrisch gesehen ist $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ein Tangentialvektor zur Kurve $\{\mathbf{x}(t) | t \in \mathbb{R}\}$ am Punkt $\mathbf{x}(t)$.

Funktionen mehrerer reeller Variablen

In einem weiteren Verallgemeinerungsschritt betrachten wir im Folgenden allgemeine Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, z.B. parametrisierte Flächen $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, oder das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das jedem Punkt im Raum die an diesem Punkt herrschende elektrische Feldstärke zuweist.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nach x_i dadurch definiert, dass nach x_i differenziert wird, während alle anderen Komponenten von x konstant gehalten werden, d.h. z.B.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}.$$

Höhere partielle Ableitungen können sowohl nach derselben als auch nach verschiedenen Variablen genommen werden, z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

wenn beide gemischten Ableitungen existieren und stetig sind.

Für die Verkettung $(f \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt die verallgemeinerte Kettenregel

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Das totale Differential

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

gibt an, wie sich f verändert, wenn sich die x_i jeweils um einen infinitesimalen Betrag dx_i verändern; für endliche Änderungen gilt die Näherung

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt komponentenweise

$$df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

oder in Matrixschreibweise

$$\frac{df}{dt} = J_f \frac{dx}{dt}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Für $m = n$ gibt die Determinante der Jacobi-Matrix (die Jacobi-Determinante) an, wie sich ein infinitesimales Volumen unter der Abbildung f jeweils lokal verändert.

Gradient, Divergenz und Rotation

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Gradienten von f als den Vektor

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

der in die Richtung der maximalen Zunahme von f unter Variation der x_i zeigt.

Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen $f = \text{const.}$. Damit eine differenzierbare Funktion f an einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ein Extremum hat, ist

$$\text{grad } f(x) = 0$$

eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung.

Der Gradient lässt sich mit Hilfe des Nabla-Operators

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als

$$\text{grad } f = \nabla f$$

schreiben. Wir können den Nabla-Operator wie einen Vektor behandeln, wenn wir folgende Rechenregeln beachten:

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g \\ \nabla(fg) &= (\nabla f)g + f(\nabla g) \end{aligned}$$

Das totale Differential kann als

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$$

geschrieben werden.

Für eine Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ können wir mit Hilfe des Nabla-Operators die Divergenz

$$\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

und die Rotation

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$$

definieren. Physikalisch gesehen ist die Divergenz ein Skalarfeld, das die Quellstärke des Vektorfeldes \mathbf{f} misst, und die Rotation ein Vektorfeld, das die Wirbelstärke des Vektorfeldes \mathbf{f} misst. Es gelten die wichtigen Beziehungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla f) &= 0\end{aligned}$$

d.h. ein Gradient ist wirbelfrei und ein Wirbelfeld ist quellenfrei.

Höherdimensionale Integrale

Wir definieren das Kurvenintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entlang der Kurve $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}(t) | t \in [a; b] \wedge \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a \wedge \mathbf{x}(b) = \mathbf{x}_b\}$ durch

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}(a + ih)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} h = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt$$

Das Kurvenintegral bei umgekehrtem Durchlaufen der Kurve hat den gleichen Betrag und das entgegengesetzte Vorzeichen. Bei Aneinandersetzen zweier Kurven addieren sich die Kurvenintegrale.

Wenn für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbf{f} = \nabla \phi$ gilt, heißt \mathbf{f} ein Gradientenfeld, und es gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_a^b \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{x}(t)) dt = \phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a)$$

so dass das Kurvenintegral nur von den Endpunkten von \mathcal{C} , jedoch nicht vom gewählten Pfad abhängt. Insbesondere verschwindet für ein Gradientenfeld das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve mit $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$, da

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_a) - \phi(\mathbf{x}_a) = 0$$

Im \mathbb{R}^3 gilt: \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld g.d.w. $\nabla \times \mathbf{f} = 0$.

Wir definieren das Integral einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über die Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y) | x \in [a; b] \wedge y \in [y_1(x); y_2(x)]\}$ über

$$\iint_{\mathcal{F}} g dF = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) dy dx = \int_a^b (G(x, y_2(x)) - G(x, y_1(x))) dx$$

mit G einer beliebigen Stammfunktion von g bezüglich y für alle x ,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = g(x, y).$$

Entsprechend definieren wir das Volumenintegral einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über das Volumen $\mathcal{V} = \{(x, y, z) | x \in [a; b] \wedge y \in [y_1(x); y_2(x)] \wedge z \in [z_1(x, y); z_2(x, y)]\}$ als

$$\iiint_{\mathcal{V}} g dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(y, x)}^{z_2(y, x)} g(x, y, z) dz dy dx.$$

Wir definieren das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ über eine Oberfläche $\mathcal{F} = \{\mathbf{x}(u, v) | u \in [a; b] \wedge v \in [\alpha; \beta]\}$ durch

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{F} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)_{\substack{u = \frac{i}{m} \\ v = \frac{j}{n}}} \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) dudv$$

Das Flächenintegral über die entgegengesetzt orientierte Fläche hat den gleichen Betrag und das entgegengesetzte Vorzeichen. Beim Aneinandersetzen von Flächen addieren sich die Flächenintegrale. Bei Flächenintegralen über geschlossene Oberflächen ist es Konvention, die nach außen weisende Normale zu wählen.

Es gilt der Satz von Gauss: Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über die Oberfläche eines Volumens ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{F}.$$

Ferner gilt der Satz von Stokes: Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation,

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

Krummlinige Koordinaten

Wir führen krummlinige Koordinaten auf dem \mathbb{R}^2 ein, indem wir ihn als die Ebene $\{(x, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ in den \mathbb{R}^3 einbetten und durch $(u, v) \mapsto (x, y)$ parametrisieren. Dann ist das Flächenelement

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) dudv = \mathbf{e}_z \det(J) dudv$$

mit J der Jacobi-Matrix der Funktion $(u, v) \mapsto (x, y)$, und wir können allgemein

$$dF = dx dy = |\det(J)| dudv$$

identifizieren.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten (r, φ)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \det(J) &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \\ &\rightsquigarrow dF = r dr d\varphi \end{aligned}$$

In gleicher Weise können wir auf dem \mathbb{R}^3 krummlinige Koordinaten einführen, indem wir ihn durch $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ parametrisieren. Wir erhalten das Volumenelement

$$dV = |\det(J)| dudv dw$$

mit J der Jacobi-Matrix der Funktion $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$.

Beispiel: Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \det(J) &= \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho \\ &\rightsquigarrow dV = \varrho d\varrho d\varphi dz \end{aligned}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) r^2 \sin \vartheta = r^2 \sin \vartheta \\ &\rightsquigarrow dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$