Zusammenfassung zum Thema Gewöhnliche Differentialgleichungen

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Physikalische Gesetze bestimmen zukünftige Zustände durch die momentane Veränderung physikalischer Größen in Abhängigkeit vom momentanen Zustand. Mathematisch lässt sich eine solche Beziehung durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$$

ausdrücken. Physikalische Gesetze sind in der Regel Differentialgleichungen 2. Ordnung ($n = 2$), gelegentlich auch 1. Ordnung ($n = 1$).
Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichung durch n Anfangswertbedingungen $x(0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ ergänzen, die den Ausgangszustand beschreiben. Zum Beispiel benötigt die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ die Angabe von Ausgangsort $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ und Ausgangsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{v}_0$ als Anfangswerten, um ein wohlgestelltes mechanisches Problem zu erhalten.
Für Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

definieren wir das Richtungsfeld $(1, \dot{x}(t))$ in der $(t, x(t))$-Ebene. Dieses Vektorfeld ist überall tangential zur Kurvenschar der Graphen der Lösungen.
Wir unterscheiden ferner homogene lineare Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = 0$$

von inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = f(t)$$

Wenn $x_p(t)$ irgendeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (sog. partikuläre Lösung) ist und $x_h(t)$ die zugehörige homogene Differentialgleichung löst, so ist auch $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Einige lösbare Differentialgleichungen erster Ordnung
Eine Differentialgleichung der trivialen Form

$$\dot{x}(t) = f(t)$$

hat die Lösung

$$x(t) = \int f(t)\mathrm{d}t + c$$

wobei die Integrationskonstante c durch die Anfangswertbedingung $x(0) = x_0$ bestimmt wird. Entsprechend können Differentialgleichungen beliebiger Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t)$$

durch n-faches Integrieren gelöst werden. Die n Integrationskonstanten sind durch die n Anfangswertbedingungen $x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}$ eindeutig bestimmt.
Die einfachste nicht-triviale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)$$

beschreibt einen Prozess, in dem die Veränderung einer Größe proportional zu dieser Größe selbst ist. Für $\lambda > 0$ ist dies ein Wachstumsprozess (z.B. Bakterienkolonie), für $\lambda < 0$ ein Zerfallsprozess (z.B. radioaktiver Zerfall). Die Lösung der Wachstums- oder Zerfallsgleichung lautet $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$.
Unbegrenztes Wachstum ist unrealistisch – endliche Ressourcen beschränken Wachstumsprozesse.
Die logistische Differentialgleichung (frz. *logis* = Lebensraum)

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)\,[\kappa - x(t)]$$

beschreibt einen durch eine endliche Kapazität κ beschränkten Wachstumsprozess. Das Richtungsfeld zeigt, dass die Lösungskurven für $t \to \infty$ gegen $x(t) = \kappa$ streben; die Lösung lautet: $x(t) = \frac{\kappa}{1-(1-\kappa/x_0)\mathrm{e}^{-\kappa\lambda t}}$.
Eine Differentialgleichung der Form

$$f(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

heißt separabel und kann durch Integration auf die Form

$$F(x(t)) = G(t) + c$$

mit F, G Stammfunktionen von f, g gebracht werden. Die Integrationskonstante c wird durch die Anfangswertbedingung bestimmt. Die Wachstumsgleichung und die logistische Gleichung sind Beispiele für separable Differentialgleichungen.
Eine weitere Klasse lösbarer Differentialgleichungen erster Ordnung sind Differentialgleichungen der Form

$$u(x,t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + v(x,t) = 0 \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

(sog. exakte Differentialgleichungen), die sich aufgrund der Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

in die Form

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$$

mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v = \frac{\partial f}{\partial t}$ überführen und durch

$$f(x(t), t) = c$$

lösen lassen, wobei die Integrationskonstante c durch die Anfangswertbedingung festgelegt wird.

Die Schwingungsgleichung
Wegen $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin t = -\sin t$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos t = -\cos t$ hat die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

Lösungen der Form

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

wobei die Konstanten C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ festgelegt werden.
Wenn wir der Schwingungsgleichung noch einen Reibungsterm hinzufügen, erhalten wir die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ($\gamma > 0$)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega^2 x$$

Wenn wir für die Lösung den Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ machen, so erhalten wir für λ die Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda_\pm = \begin{cases} -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, & \gamma \geq \omega \\ -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & \gamma < \omega \end{cases}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $\gamma > \omega$: Kriechfall, $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 \mathrm{e}^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$
2. $\gamma = \omega$: aperiodischer Grenzfall, $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\gamma t} + C_2 t \mathrm{e}^{-\gamma t}$
3. $\gamma < \omega$: Schwingfall, $x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t)\right)$

Wir betrachten nun erzwungene Schwingungen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = A\mathrm{e}^{i\omega_f t}$$

wobei wir unsere Gleichung nun komplexifiziert haben: Real- und Imaginärteil stellen jeweils eine Differentialgleichung dar.
Der Ansatz $x_p(t) = B\mathrm{e}^{i\omega_f t}$ liefert

$$(-\omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f + \omega^2)B = A$$

und für $\gamma > 0$ erhalten wir

$$B = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit $x(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f}\mathrm{e}^{i\omega_f t} + x_h(t)$, wobei $x_h(t)$ für großes t mit $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ abstirbt.
Wir folgern, dass für kleines γ und $\omega_f = \omega$ die Amplitude der erzwungenen Schwingung groß wird – es tritt Resonanz auf.