Zusammenfassung zum Thema Differential- und Integralrechnung

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Funktionen einer reellen Variablen
Wir betrachten im folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine solche Funktion heißt

- nach oben beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ f(x) \leq S$,
- nach unten beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ f(x) \geq S$,
- beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ |f(x)| \leq S$,
- monoton wachsend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- monoton fallend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- streng monoton wachsend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- streng monoton fallend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Falls ferner $x \in D \Rightarrow -x \in D$ gilt, heißt eine Funktion

- gerade, wenn $f(-x) = f(x)$,
- ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$.

Falls $x \in D \Rightarrow (x + p) \in D$ und $f(x + p) = f(x)$ gilt, heißt die Funktion periodisch mit Periode p.
Einige besonders wichtige Funktionen sind die sog. elementaren Funktionen:

$f(x) \equiv y$	D	W	$f^{-1}(y) \equiv x$	$f'(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$
x^α, $\alpha > 0$	$[0; \infty)$	$[0; \infty)$	$y^{1/\alpha}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
x^α, $\alpha < 0$	$(0; \infty)$	$(0; \infty)$	$y^{1/\alpha}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1 \\ \log\|x\|, & \alpha = -1 \end{cases}$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0; \infty)$	$\log y$	e^x	e^x
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[-1; 1]$	$\arcsin y$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$	$\arccos y$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$	$\arctan y$	$1/\cos^2 x$	$-\log \cos x$
$\cot x$	$(0; \pi)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arccot}\ y$	$-1/\sin^2 x$	$\log \sin x$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arsinh}\ y$	$\cosh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$[0; \infty)$	$[1; \infty)$	$\mathrm{arcosh}\ y$	$\sinh x$	$\sinh x$

Hierbei ist jeweils der maximale Definitionsbereich angegeben, auf dem eine Umkehrfunktion existiert. Natürlich lassen sich die trigonometrischen Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen und sind dann periodisch, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ etc. Ebenso lassen sich ganzzahlige Potenzen und der cosinus hyperbolicus auf negative Argumente ausdehnen.

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $a \in D$, wenn für **alle** Folgen a_n mit $a_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Eine Funktion, die an allen $a \in D$ stetig ist, nennen wir auch stetig auf D. Für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $h : \mathrm{Im}\ f \to \mathbb{R}$, sind auch $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$, $f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x)$, $h \circ f : x \mapsto h(f(x))$, sowie für $g(x) \neq 0$ auch $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig.

Die elementaren Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig. Ein Beispiel für eine nicht-stetige Funktion ist die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

die bei Null unstetig ist.
Wenn für eine Funktion die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ für **alle** Folgen a_n mit $a_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ übereinstimmen, definieren wir den Grenzwert der Funktion als

$$\lim_{x\to a} f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Für stetiges f gilt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Ein rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x\to a^+} f(x)$ lässt sich definieren, falls die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ für alle Folgen a_n mit $a_n \in D$, $a_n > a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ übereinstimmen. Entsprechend kann man einen linksseitigen Grenzwert $\lim_{x\to a^-} f(x)$ definieren.

Differenzierbarkeit
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $a \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv f'(a)$ existiert. Dieser heißt die Ableitung von f an der Stelle a.
Oft schreibt man auch $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, wobei der Differentialquotient den Grenzwert des Differenzenquotienten symbolisiert. Eine differenzierbare Funktion ist auch stetig.
Die Ableitung von f definiert wieder eine Funktion $f' : D' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ mit $D' \subseteq D$. Die Ableitung f'' von f' heißt die zweite Ableitung von f. Für die dritte und höhere Ableitungen schreiben wir auch $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}$.
Die elementaren Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich (z.T. mit Ausnahme der Randpunkte) auch differenzierbar. Ein Beispiel für eine stetige, nicht-differenzierbare Funktion ist die Betragsfunktion $|x|$, die bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist.
Wenn $f, g : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar sind, so gelten die Summenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = f'(x) + g'(x)$$

sowie die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar ist, und $g : \operatorname{Im} f \to \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x)$ differenzierbar ist, so gilt die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f) = g'(f(x))f'(x)\,.$$

Wenn $f : D \to W$, $W \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv und an der Stelle x differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ ist, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt die Umkehrfunktionsregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Aus der Produkt- und der Kettenregel folgt, wenn $f, g : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x mit $g(x) \neq 0$ differenzierbar sind, die Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f}{g} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Taylor-Entwicklung und Regel von de l'Hôpital
Für eine differenzierbare Funktion f ist die beste lineare Näherung nahe $x = x_0$ durch die Tangente gegeben $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$, wobei der Rest $R(x)$ für $x \to x_0$ schneller als $(x-x_0)$ verschwinden muss. Für Quotienten $f(x)/g(x)$ mit $f(x) = g(x) = 0$ gilt daher die Regel von de l'Hôpital,

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to x} \frac{f'(y)}{g'(y)} \,.$$

Eine bessere als die lineare Näherung an f kann (für hinreichend oft differenzierbares f) durch Polynome höheren Grades erzielt werden, wenn wir verlangen, dass die ersten n Ableitungen an der Stelle x_0 mit denen von f übereinstimmen sollen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \underbrace{R_n(x)}_{\to 0,\ x\to x_0}$$

wobei der Rest für $x \to x_0$ schneller als $(x-x_0)^n$ verschwinden muss. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, spricht man von einer reell analytischen Funktion, die durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Beispiele sind

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Extrema
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat ein lokales $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{smallmatrix} \right\}$ bei x_0, wenn

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall x \in D \cap (x_0-\epsilon; x_0+\epsilon) \ f(x) \left\{ \begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix} \right\} f(x_0)$$

Gilt sogar $\forall x \in D \ f(x) \left\{ \begin{smallmatrix} \le \\ \ge \end{smallmatrix} \right\} f(x_0)$, heißt x_0 globales $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{smallmatrix} \right\}$. Der Überbegriff für Maximum und Minimum ist Extremum.
Es gilt: Ein Extremum x_0 liegt entweder auf dem Rand von D, oder f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, oder $f'(x_0) = 0$.
Wenn $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 für $f''(x_0) > 0$ ein Minimum, für $f''(x_0) < 0$ ein Maximum, und für $f''(x_0) = 0$ entweder ein Sattelpunkt, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, oder es müssen höhere Ableitungen betrachtet werden, um das Verhalten von f nahe x_0 zu entscheiden.

Asymptotisches Verhalten
Wenn für alle Folgen a_n, die nach $+\infty$ bzw. nach $-\infty$ divergieren, jeweils derselbe Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ existiert, definieren wir

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

als den Grenzwert von f für $x \to \pm\infty$.
Im Übrigen sind folgende Notationen zur Beschreibung des Verhaltens einer Funktion in der Umgebung einer Stelle a üblich:

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x) \quad (x\to a) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ f(x) = o(g(x)) \quad (x\to a) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) = O(g(x)) \quad (x\to a) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists C > 0 \ |f(x)| \le C|g(x)| \end{aligned}$$

Integration
Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{R}$, wenn F auf D differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ ist. Wenn F Stammfunktion von f ist, so auch $F + c$, $c \in \mathbb{R}$. Man schreibt

$$F(x) = \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

für die Stammfunktion von f (unbestimmtes Integral).
Wir definieren das bestimmte (Riemann-)Integral als Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von Stufensummen,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

wenn dieser Limes unabhängig von der gewählten Zerlegung x_i $(a = x_0 < \ldots < x_n = b)$ ist.
Für $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $F = \int f(x)\ \mathrm{d}x$, gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Intuitiv ist $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ verständlich, da $f(x)$ angibt, wie schnell die Fläche unter dem Graphen wächst (welche für $x = a$ natürlich Null beträgt). Algebraisch nutzt man $f(t) = F'(t)$ und nähert $F'(t)h = F(t + h) - F(h)$, um die Stufensumme $(x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n})$ in eine Teleskopsumme zu verwandeln, wobei die Näherung im Limes $h \to 0$ exakt wird.
Für integrierbare Funktionen f, g und Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int (c \cdot f(x))\ \mathrm{d}x = c \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Aus der Produktregel für die Ableitung folgt für differenzierbare Funktionen f, g die Regel zur partiellen Integration,

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Aus der Kettenregel für die Ableitung folgt, dass für differenzierbare Funktionen f, g mit f injektiv die Identität

$$\int g(z)\ \mathrm{d}z = \int g(f(x))f'(x)\ \mathrm{d}x$$

mit $z = f(x)$ und $\mathrm{d}z = f'(x)\ \mathrm{d}x$ gilt. Für bestimmte Integrale müssen auch die Grenzen transformiert werden:

$$\int_a^b g(z)\ \mathrm{d}z = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} g(f(x))f'(x)\ \mathrm{d}x \qquad \textit{bzw.} \qquad \int_a^b g(f(x))f'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z)\ \mathrm{d}z$$

Rationale Funktionen lassen sich durch Partialbruchzerlegung integrieren:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{e_i} \int \frac{A_{ij}}{(x - y_i)^j}\ \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{d_i} \int \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + a_i x + b_i)^j}\ \mathrm{d}x$$

wobei Paare komplex konjugierter Wurzeln von Q in der Form von (über $\mathbb{R}$ irreduziblen) quadratischen Polynomen zusammengefasst werden. Die Partialbrüche lassen sich alle elementar integrieren:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - y)^k} = \begin{cases} \log|x - y|, & k = 1, \\ -\frac{1}{(k-1)(x-y)^{k-1}}, & k \neq 1, \end{cases}$$

und entsprechende Formeln für quadratische Nenner.